

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-WIEN
K. GIRKMANN-WIEN · F. HOPFNER-WIEN · F. JUNG-WIEN
F. MAGYAR-WIEN · E. MELAN-WIEN · K. WOLF-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN und K. WOLF-WIEN

BAND I, HEFT 4/5 (SCHLUSSHEFT)

(ABGESCHLOSSEN AM 31. JULI 1947)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1947

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20 — 25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag),
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten für ihre Arbeit einen Unkostenersatz von S 50.— für den Druckbogen von 16 Seiten, im Höchstfall S 75.— für eine Arbeit. Sie erhalten ferner 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

Band I, Heft 4/5

Inhaltsverzeichnis

	Seite
F. Magyar, K. Wolf zum 60. Geburtstag	251
<i>Originalarbeiten.</i>	
C. Kämmerer, Über eine Zustandsgleichung mit Berücksichtigung des kritischen Koeffizienten	253
H. Mache, Über die Erhöhung der Zündfähigkeit des elektrischen Funkens durch örtliche Verbesserung des zu zündenden Gasgemisches	273
W. Wunderlich, Höhere Radlinien	277
H. Parkus, Drillschwingungen von Luftschraubenblättern	296
F. Chmelka, Über die Bewegung einer kreisförmigen Scheibe auf reibender Unterlage ...	302
C. Torre, Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung auf die Fließ- und Bruchgrenze ...	316
E. Czitary, Zur Bieigungsbeanspruchung der Drahtseile	342
F. Pongratz, Die Nutzbreite der zweiseitig freigestützten, mit einer Einzellast belasteten Stahlbetonplatte	351
L. Flamm, Elektronen-Feldtheorie	358
A. Dusehek, Matrizen, Vektoren und Tensoren	371
Fritz Söchting, Freie erzwungene gedämpfte Schwingungen mit nicht linearer Kennlinie eines Systems mit einem Freiheitsgrad	382
P. Funk, Über die Stabilität des Gleichgewichtes bei einem durch Klemme und Hülse oder Klemme und Öse festgehaltenen elastischen Draht	389
W. Gauster-Filek, Wechselfelder, Kreisdrehfelder und elliptische Drehfelder	394
F. Jung, Der Culmannsche und der Mohrsche Kreis	408
R. Inzinger, Zur graphischen Integration linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	410
K. Girkmann, Kraftausbreitung in einer Säule	420
<i>Buchbesprechungen</i>	426
Wagner, G., Gasanalytisches Praktikum. Dritte Auflage. — Ortner, G., Atome und Strahlen.	



Karl Wuy

K. Wolf zum 60. Geburtstag.

Karl Wolf wurde am 13. November 1886 in Bielitz im damaligen Österreichisch-Schlesien als Sohn eines Gymnasialprofessors geboren. Nach Beendigung seiner Gymnasialstudien übersiedelte er 1905 nach Wien, wo er seine Studien an der Universität und an der Technischen Hochschule aufnahm, die er 1909 mit der Ablegung der Prüfung für das Lehramt Mathematik und Physik beendete. Ein Jahr später promovierte er an der Wiener Universität zum Doktor der Philosophie.

Nach einer kurzen Tätigkeit im damaligen Gradmessungsamt wurde Wolf im Jahre 1911 Assistent der Lehrkanzel für reine Mechanik an der Technischen Hochschule in Wien.

Der Ausbruch des ersten Weltkrieges veranlaßte Wolf, seine akademische Laufbahn zunächst zu unterbrechen. Er meldete sich freiwillig zur Kriegsdienstleistung und wurde dem technischen Militärkomitee zugeteilt, wo er schließlich die Charge eines Landsturm-Ingenieuroberleutnants erreichte. Er fand aber trotzdem noch Zeit, sich im Jahre 1915 an der Technischen Hochschule in Wien für das Gesamtgebiet der technischen Mechanik zu habilitieren.

1922 wurde Wolf, der schon 1919 die vertretungsweise Leitung der Lehrkanzel für allgemeine Mechanik und graphische Statik übernommen hatte, mit dem Titel eines ordentlichen Professors ausgezeichnet, 1924 wurde er zum Ordinarius ernannt, nachdem er inzwischen für die Lehrkanzel Mechanik an der Technischen Hochschule in Brünn vorgeschlagen worden war.

Schon während seiner Assistentenzeit begann Wolf sich wissenschaftlich zu betätigen. Als erste Arbeiten erschienen 1913 und 1914 in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wissenschaften „Über das Saint-Venant-Prinzip bei Balkenproblemen“ und „Zur Integration $\Delta \Delta F = 0$ durch Polynome im Falle des Staumauerproblems“. Die Ergebnisse der letzteren Arbeit wurden in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften von Prof. Wieghardt in einem Artikel über die Statik der Baukonstruktionen eingehend dargelegt. Die in den Jahren 1916 und 1917 in den Mitteilungen des Gegenstandes des Art.- und Geniewesens veröffentlichten Aufsätze „Einfluß des Luftdruckes auf die Brenngeschwindigkeit eines Zünders“ und „Über die Herstellung einer Luftschießtafel“ waren ebenso wie die Arbeit „Einfluß der Einspannung auf die Torsion eines Vollzylinders“, Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, 1917, offenbar durch die Tätigkeit beim technischen Militärkomitee angeregt. Aber bald nach Wiederaufnahme seiner Lehrtätigkeit wendete sich Wolf wieder der Theorie der Elastizitäts- und Festigkeitslehre zu. Seine Beiträge zur ebenen Elastizitätstheorie: I. „Einfluß eines elliptischen Loches bzw. Spaltes auf einen einachsigen Spannungszustand“, Zeitschrift für technische Physik 1921, II. „Einfluß eines Loches bzw. Spaltes auf den Spannungszustand im Falle der reinen und der zusammengesetzten Biegung eines Balkens“, Zeitschrift für technische Physik 1922, III. „Zur Spannungsverteilung in einem Gewölbe“, Zeitschrift für technische Physik 1923 fanden allgemein Interesse und Anerkennung. Insbesondere die Ergebnisse des ersten dieser Beiträge, der eine erstmalige exakte Behand-

lung des Problemes darstellt, wurde in Lehrbüchern und Handbüchern, unter anderem auch von Föppl, ausführlich behandelt. Nun folgen die Arbeiten „Zur Bruchtheorie von A. Griffith“ und „Schwingungen elastischer Seile“ in der Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 1923 und 1927 und ein Aufsatz „Luftbewegung in Höhlen“ in der Zeitschrift für Höhlenkunde. Im Jahr 1931 erschien das „Lehrbuch der Technischen Mechanik starrer Systeme“, Springer-Verlag Wien, das in der Fachwelt sehr gut aufgenommen und auch von den Studenten in Deutschland gerne benützt wurde. Hamel schreibt darüber in seiner Rezension in der Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik: „Man darf es eines der besten technischen Mechaniken nennen, die es in Deutschland gibt, es ist recht sorgfältig, klar und flüssig geschrieben“. Das Buch hat tatsächlich eine persönliche Note und Wolf ist ein Meister in der Formulierung der Grundbegriffe. Außer kleineren Veröffentlichungen und Rezensionen sollen an weiteren Arbeiten noch erwähnt werden: „Schwingungen eines elastischen Streifens“, Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften 1935, und „Ausbreitung der Kraft in der Halbebene und im Halbraum bei anisotropem Material“, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 1935, eine Arbeit, die in der Fachliteratur vielfach zitiert und von anderen Autoren, unter anderem auch in Japan in englischer Sprache, als Grundlage für weitere Arbeiten benützt wurde.

Im Jahre 1938 ereilte Wolf mitten in seiner Amtstätigkeit als Dekan der Fakultät für Bauingenieurwesen das Schicksal so vieler treuer Österreicher; er wurde mit gekürzter Pension in den Ruhestand versetzt. Aber der Mangel an so hervorragenden Fachleuten brachte es mit sich, daß Wolf schon bald darauf seine Kenntnisse in der Industrie verwerten konnte. Seine Arbeit „Kreiszyllindrische Behälter auf nachgiebiger Grundlage“, Ingenieur-Archiv 1942, legt Zeugnis dafür ab, daß er es verstanden hat, seine wissenschaftliche Begabung der Praxis nutzbar zu machen, die ihm anderseits die Anregung gegeben hatte. Eine weitere Arbeit aus dieser Zeit „Die Beanspruchung der Motorenlager bei der Landung von Flugzeugen“ ist inzwischen in dem neu erschienenen Österreichischen Ingenieur-Archiv 1946, H. 1/2 gedruckt worden.

Die wieder befreite Heimat findet Wolf als einen der ersten an seiner früheren Arbeitsstätte. Mit unermüdlichem Eifer und ungebrochenem Optimismus arbeitet Wolf an dem Wiederaufbau der Technischen Hochschule in Wien, zu deren Rector magnificus er für das Studienjahr 1946/47 gewählt wurde. Trotz der schweren Belastung, mit der die Tätigkeit als akademischer Funktionär und Lehrer heute verbunden ist, findet Wolf aber immer noch Zeit für wissenschaftliche Arbeit. Er beendet die Neubearbeitung der zweiten Auflage seines Lehrbuches und stellt sich außerdem gelegentlich des Wiederauflebens des österreichischen Zeitschriftenwesens als Schriftleiter für das Österreichische Ingenieur-Archiv zur Verfügung. Die Österreichische Akademie der Wissenschaften ehrt ihn durch die Wahl zum korrespondierenden Mitglied.

Wolf ist ein allgemein beliebter Lehrer, ein stets aufrichtiger und hilfsbereiter Kollege und ein Mann von großer menschlicher Güte. Die Mitarbeiter dieses Heftes schließen sich den Wünschen seiner vielen Freunde und Schüler an: Möge es ihm vergönnt sein, der Wissenschaft noch viele Jahre in voller Gesundheit und mit ungebrochener Energie zu dienen.

Technische Hochschule Wien,
Institut für Strömungslehre.

F. Magyar.

Über eine Zustandsgleichung mit Berücksichtigung des kritischen Koeffizienten.

Von C. Kämmerer, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

A. Einleitung. (Die Waalssche Zustandsgleichung.)

Unter den theoretisch abgeleiteten Zustandsgleichungen ist die van der Waalssche am bekanntesten. Sie ist bezüglich v vom dritten Grad und lautet:

$$p = \frac{R_1 T}{(v - b)} - \frac{a}{v^2}. \quad (1)$$

Hierin bedeuten: p den absoluten Druck in kg/m^2 ; v das spezifische Volumen in m^3/kg ; T die absolute Temperatur in Grad Kelvin; R_1 , a und b Konstanten, die sich aus dem Verlauf der kritischen Isotherme im kritischen Punkt ergeben und folgenden drei Bedingungsgleichungen genügen müssen: I. der Zustandsgleichung, II. der Bedingung $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0$, für $p = p_k$ und $T = T_k$ (waagrechte Tangente im kritischen Punkt), III. der Bedingung $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_T = 0$, für $p = p_k$ und $T = T_k$ (kritischer Punkt = Wendepunkt); p_k , v_k , T_k die kritischen Daten.

Das Glied $\frac{R_1 T}{(v - b)}$ soll den durch die ungeordnete Molekularbewegung verursachten „thermischen Abstoßungsdruck“ und das Glied a/v^2 den durch molekulare Anziehung bedingten „Kohäsionsdruck“ darstellen. Aus den Bedingungen I, II, und III erhält man die drei Konstanten wie folgt:

$$a = 3 p_k v_k^2, \quad b = v_k/3, \quad R_1 = \frac{8}{3} \frac{p_k v_k}{T_k}.$$

In dimensionsloser Form geschrieben, lautet Gl. (1):

$$p_x = \frac{8 T_x}{(3 v_x - 1)} - \frac{3}{v_x^2}, \quad (1a)$$

wenn mit $p_x = \frac{p}{p_k}$, $v_x = \frac{v}{v_k}$ und $T_x = \frac{T}{T_k}$ die reduzierten oder dimensionslosen Drucke, Volumina und Temperaturen bezeichnet werden.

Trägt man die reduzierten Drucke p_x über den reduzierten oder dimensionslosen Volumina v_x auf, so erhält man nach Gl. (1a) ein für alle Stoffe gleich aussehendes Isothermennetz, da in Gl. (1a) weder die Gaskonstante bzw. das Molekulargewicht noch die kritischen Daten enthalten sind.

Zuständen verschiedener Stoffe, aber mit gleichem p_x und v_x (sog. korrespondierenden Zuständen) müßte nach Gl. (1a) dieselbe dimensionslose Temperatur entsprechen. Dieses als „Korrespondenzprinzip“ bekannte Gesetz stellt aber nur eine grobe Annäherung an die wirklichen Verhältnisse dar.

Neben ihren glänzenden Erfolgen hat die van der Waalssche Formel schon aus diesem Grunde gewisse Unstimmigkeiten und Unzulänglichkeiten aufzuweisen, die den Ausgangspunkt für die vorliegende Betrachtung bilden sollen.

1. So müßte die Formel (1) für große Volumina in die Gleichung des idealen Gases:

$$p = \frac{R T}{v} \quad (2)$$

übergehen, wenn mit R die spezielle Gaskonstante in $\left[\frac{\text{kgm}}{\text{kg} \cdot \text{Grad}} \right]$ bezeichnet wird.

Statt dessen erhält man aus (1) die Beziehung:

$$p = \frac{R_1 T}{(v - b)}.$$

Da die Konstante R_1 mit der speziellen Gaskonstante R nicht identisch ist, stimmen die rechten Gleichungsseiten weder im Zähler noch im Nenner genau überein.

2. Bei Erreichung des Volumens b würde nach Gl. (1) der äußere Druck p unendlich groß werden, was den Anschauungen über die Struktur der Materie widerspricht, wonach der Druck p erst beim Volumen Null unendlich groß werden könnte.

3. Beim Nullpunkt der Temperatur wäre nach Gl. (1):

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = 0.$$

Diese Beziehung ist für positive Drücke p (nicht Zugbeanspruchungen) nur erfüllbar, wenn $(v - b) = 0$ oder das Volumen $v = b$, d. h. konstant, der Stoff also nicht zusammendrückbar ist. Nun ist aber auch beim absoluten Nullpunkt die Materie noch immer als kompressibel zu betrachten, so daß auch in diesem Punkt eine grundsätzliche Unstimmigkeit besteht.

4. Schließlich kann als gesichert gelten, daß neben den Anziehungskräften der Moleküle (der Kohäsion) auch molekulare Abstoßungskräfte wirksam sind, die aber in Gl. (1) ebenso wie die Temperaturabhängigkeit des Kohäsionsdruckes nicht berücksichtigt sind.

B. Untersuchung einer anderen Zustandsgleichung.

In dem Bestreben, die angeführten Unstimmigkeiten zu vermeiden, gleichzeitig aber die Einfachheit und Übersichtlichkeit der Formel nicht zu beeinträchtigen, ist der Verfasser unter anderem¹ zu folgender Gleichung, die bezüglich des Volumens ebenfalls vom dritten Grade ist, gekommen:

$$p = \frac{R T}{v} + \frac{b}{v^2} - \frac{a}{v(v + c)}. \quad (3)$$

Hierin bedeuten: R die spezielle Gaskonstante in $\left[\frac{\text{kgm}}{\text{kg} \cdot \text{Grad}} \right]$, die nunmehr mit ihrem wirklichen Wert in die Zustandsgleichung eingeht, womit auch das Molekulargewicht $m = \frac{848}{R}$ in $[\text{kg/k Mol}]$ des betreffenden Stoffes berücksichtigt ist; a , b und c die drei Konstanten, die aus den drei bereits angeführten Bedingungsgleichungen I, II und III zu berechnen sind.

Das erste Glied rechts $\left(\frac{R T}{v} \right)$ soll den „thermischen Abstoßungsdruck“, das zweite Glied (b/v^2) den „molekularen Abstoßungsdruck“ und das dritte Glied $\frac{a}{v(v + c)}$ den Kohäsionsdruck darstellen.

Man erkennt zunächst, daß Gl. (3) für große Volumina genau in die Gleichung des idealen Gases $p v = R T$ übergeht, so daß die unter 1 angeführte Ungenauigkeit beseitigt ist. Die Einführung der Konstanten c stellt keine Vermehrung der Konstanten-

zahl dar, da R eine vorgegebene Größe und nicht, wie bei van der Waals, aus den drei Bedingungsgleichungen zu berechnen ist.

Konstantenbestimmung und reduzierte Gleichungsform.

Von der kritischen Isotherme sind im kritischen Punkt folgende drei Gleichungen zu erfüllen:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad p &= \frac{R T}{v} + \frac{b}{v^2} - \frac{a}{v^2 + v c}, \\ \text{II.} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T &= -\frac{R T}{v^2} - \frac{2b}{v^3} + \frac{a(2v+c)}{(v^2+vc)^2} = 0, \\ \text{III.} \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_T &= \frac{2RT}{v^3} + \frac{6b}{v^4} - \frac{2a(2v+c)^2}{(v^2+vc)^3} + \frac{2a}{(v^2+vc)^2} = 0. \end{aligned}$$

Aus I und II erhält man durch Eliminieren von b :

$$\left(2p - \frac{RT}{v} \right) = \frac{a(2v+c)}{v(v+c)^2} - \frac{2a}{v(v+c)} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{RT}{v} - 2p \right) = \frac{ac}{v(v+c)^2}$$

und aus I und III ebenfalls durch Eliminieren von b :

$$\left(6p - \frac{4RT}{v} \right) = \frac{2a(2v+c)^2}{v(v+c)^3} - \frac{6a}{v(v+c)} - \frac{2a}{(v+c)^2}.$$

Durch Eliminieren von a aus den vorstehenden zwei Gleichungen ergibt sich:

$$\left(\frac{4RT}{v} - 6p \right) = \left(\frac{RT}{v} - 2p \right) \frac{6v+4c}{(v+c)}$$

und nach Kürzung der beiden Gleichungsseiten mit p :

$$\left(\frac{4RT}{pv} - 6 \right) = \left(\frac{RT}{pv} - 2 \right) \frac{(6v+4c)}{(v+c)}.$$

Da sich die Ableitung auf den kritischen Punkt bezieht, sind statt p , v und T die kritischen Daten p_k , v_k und T_k zu setzen und man bekommt:

$$\left(\frac{4RT_k}{p_k v_k} - 6 \right) = \left(\frac{RT_k}{p_k v_k} - 2 \right) \frac{(6v_k+4c)}{(v_k+c)}.$$

Der dimensionslose Ausdruck $\frac{RT_k}{p_k v_k}$, der die kritischen Daten und die spezielle Gaskonstante R bzw. das Molekulargewicht m enthält, wird als „kritischer Koeffizient“ (k) bezeichnet.

Führt man seinen Reziprokwert $x = 1/k$ in obige Gleichung ein, so wird:

$$\left(\frac{4}{x} - 6 \right) = \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \frac{(6v_k+4c)}{(v_k+c)}$$

und

$$c = v_k \left(\frac{1-3x}{x} \right) = v_k \gamma.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in die nur a und c enthaltende Gleichung erhält man die Konstante a zu:

$$a = \frac{v_k^2 p_k (1-2x)^3}{(1-3x)x^2} = v_k^2 p_k \beta$$

und durch Einsetzen der für a und c erhaltenen Ausdrücke in die Gl. I die dritte Konstante b zu:

$$b = v_k^2 p_k \frac{x}{(1-3x)} = v_k^2 p_k 1/\gamma.$$

Alle drei Konstanten in die Zustandsgleichung (3) eingesetzt, ergeben schließlich die Formel:

$$p = \frac{RT}{v} + \frac{v_k^2 p_k x}{v^2(1-3x)} - \frac{v_k^2 p_k (1-2x)^3}{(1-3x)x^2 v \left(v + v_k \frac{1-3x}{x} \right)} \quad (3a)$$

oder kürzer:

$$p = \frac{R T}{v} + \frac{v_k^2 p_k}{v^2 \gamma} - \frac{v_k^2 p_k \beta}{v (v + \gamma v_k)}. \quad (3a_1)$$

Nach entsprechender Umformung erhält man die reduzierte oder dimensionslose Form der Zustandsgleichung:

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x} + \frac{x}{v_x^2 (1 - 3x)} - \frac{(1 - 2x)^3}{(1 - 3x) x^2 v_x \left(v_x + \frac{1 - 3x}{x} \right)}, \quad (3b)$$

in welcher nun außer den reduzierten Zustandsvariablen noch der kritische Koeffizient bzw. dessen Reziprokwert x vorkommt.

Für große Volumina v_x geht Gl. (3b) in die dimensionslose Gleichung des idealen Gases:

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x} \quad (2a)$$

über, welche mit $p v = R T$ identisch ist.

Folgerungen aus Gl. (3).

Die dimensionslose Kenngröße x bewegt sich etwa in den Grenzen von 0,2 (Essigsäure) bis 0,327 (Helium). Während sich aus bekannten Zustandsgleichungen für x nur ein einziger Wert (z. B. $3/8 = 0,357$ bei van der Waals und $4/15 = 0,267$ bei A. Wohl) ergibt, ist in Gl. (3) der wirkliche, experimentell bestimmte, von Stoff zu Stoff verschiedene Wert des kritischen Koeffizienten verwendet.

Für verschiedene Stoffe ergeben sich daher verschiedene oder spezielle dimensionslose Zustandsgleichungen; das erwähnte Korrespondenzprinzip ist nach Gl. (3) nicht mehr gültig.

Die spezielle Zustandsgleichung lautet z. B. für Wasserdampf (H_2O) mit $x = 0,225$

$$p_x = 4,45 \frac{T_x}{v_x} + \frac{0,693}{v_x^2} - \frac{10,1}{v_x (v_x + 1,445)} \quad (3c)$$

oder für Kohlensäure (CO_2) mit $x = 0,276$:

$$p_x = 3,63 \frac{T_x}{v_x} + \frac{1,605}{v_x^2} - \frac{6,88}{v_x (v_x + 0,6235)} \quad (3d)$$

oder für Wasserstoff (H_2) mit $x = 0,306$:

$$p_x = 3,27 \frac{T_x}{v_x} + \frac{3,732}{v_x^2} - \frac{7,615}{v_x (v_x + 0,268)}. \quad (3e)$$

Nach der allgemeinen reduzierten Gl. (3b) würde für $x = 1/3 = 0,333$ der äußere Druck p_x unendlich groß werden, da die Differenz $(1 - 3x)$ dann gleich Null wäre. Diese Schwierigkeit ist aber ausgeschaltet, da der höchste vorkommende Wert von x (für Helium) nur 0,327 beträgt.

Für den kritischen Punkt ist $p_x = 1$, $v_x = 1$ und $T_x = 1$. Es muß somit z. B. für Wasserstoff:

$$3,27 + 3,732 - \frac{7,615}{1,268} = 1$$

sein, was als Probe für die Richtigkeit der Koeffizientenberechnung dienen kann.

Die nach Gl. (3c), (3d) und (3e) für die kritische Isotherme $T_x = 1$ berechneten Werte von p_x sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt und für CO_2 in Abb. 3 über v_x aufgetragen.

$v_x =$	0,4	0,5	0,6	0,8	1	2	4	7	
$p_x (H_2O) =$	1,74	1,292	1,115		1	0,933	0,6903	0,4791	Gl. (3c)
$p_x (CO_2) =$	2,30	1,45	1,130	1,01	1	0,905	0,6362	0,4229	Gl. (3d)
$p_x (H_2) =$	2,959	—	—	—	1	—	—	0,4107	Gl. (3e)

Aus der Zusammenstellung geht hervor, daß dem gleichen Volumen v_x bei verschiedenen Stoffen verschiedene Drücke p_x entsprechen, so daß die Isothermennetze nach Gl. (3) auch bei dimensionsloser Auftragung nicht einander gleichen.

Als zweite Folgerung ist anzuführen, daß der äußere Druck p_x nach Gl. (3) erst beim Volumen Null unendlich groß werden kann, womit die unter 2 genannte Unstimmigkeit der Waalsschen Gleichung eliminiert ist.

Temperaturabhängigkeit des zweiten und dritten Gliedes.

Die Temperaturabhängigkeit des Kohäsions- und molekularen Abstoßungsdruckes soll in erster Näherung dadurch berücksichtigt werden, daß die beiden letzten Glieder von Gl. (3b) durch T_x dividiert werden (vgl. die Formeln von Berthelot und A. Wohl). Dann wird allgemein:

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x} + \frac{x}{T_x v_x^2 (1-3x)} - \frac{(1-2x)^3}{T_x v_x \left(v_x + \frac{1-3x}{x} \right) (1-3x) x^2}. \quad (4)$$

1. Beispiel: Unterkritische Isotherme für CO_2 0°C (oder $T_x = 0,898$), zugehörige Sattedampfspannung $p_s = 35,54 \text{ kg/cm}^2$ (oder $p_{sx} = 0,474$). Nach Gl. (4) ergibt sich für CO_2 und $T_x = 0,898$:

$$p_x = \frac{3,27}{v_x} + \frac{1,785}{v_x^2} - \frac{7,64}{v_x(v_x + 0,6235)}.$$

Die nach obiger Gleichung berechneten Drücke p_x sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt und in Abb. 3 über v_x aufgetragen.

$v_x =$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,4	2	3	4	5	7
$p_x =$	3,17	0,645	0,08	0,07	0,1	0,18	0,265	0,345	0,555	0,623	0,585	0,5155	0,4543	0,3609

Aus Abb. 3 geht hervor, daß die durch Planimetrieren in bekannter Weise zu ermittelnde Sattedampfspannung mit dem Dampftabellenwert $p_{sx} = 0,474$ nahezu übereinstimmt.

2. Beispiel: Überkritische Isotherme für CO_2 und 60°C ($T_x = 1,095$). Nach Gl. (4) wird für $v_x = 1 \quad 2 \quad 4$
 $p_x = 1,57 \quad 1,1555 \quad 0,7467$

Das Zutreffen der Beziehung (4) läßt sich auch dadurch überprüfen, daß man aus ihr die Anfangsneigung der Dampfdruckkurve bzw. $\text{tg } \alpha$ im $p_x T_x$ -Diagramm, Abb. 1, ermittelt und mit experimentell erhaltenen Werten vergleicht.

Die rechnerische Ermittlung von $\text{tg } \alpha$ aus Gl. (4) ist in einfacher Weise ausführbar, weil die Tangente an die Dampfspannungskurve im kritischen Punkt mit der Tangente an die kritische Isochore oder Isovolum ($v_x = 1$) zusammenfällt, so daß nur die Neigung der letzteren, das ist

$$\left(\frac{\partial p_x}{\partial T_x} \right)_{\substack{v_x=1 \\ T_x=1}} = \text{tg } \alpha. \quad (5)$$

zu bestimmen ist.

Nach Gl. (4) wird:

$$\left(\frac{\partial p_x}{\partial T_x} \right)_{\substack{v_x=1 \\ T_x=1}} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1-3x} + \frac{(1-2x)^3}{(1-3x)x^2 \left(1 + \frac{1-3x}{x} \right)} \quad (6)$$

oder

$$\text{tg } \alpha = \frac{2-7x+3x^2}{(1-3x)x} = \frac{(2-x)(1-3x)}{(1-3x)x} = \frac{2}{x} - 1 = 2k - 1. \quad (6a)$$

Die Anfangsneigung der Dampfdruckkurve im $p_x T_x$ -Diagramm ist also nach Gl. (4) und (5) nur vom Kennwert x bzw. vom kritischen Koeffizienten, und zwar in sehr einfacher Weise abhängig. (Eine Beziehung, die sich bereits früher für eine andere Form C der Zustandsgleichung ergeben hat.)

Nach van der Waals erhält man für $\operatorname{tg} \alpha$ nach Gl. (1a)

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(-\frac{\partial p_x}{\partial T_x} \right)_{\substack{v_x = 1 \\ T_x = 1}} = \frac{8}{3-1} = 4,$$

d. h. einen für alle Stoffe gleich großen und außerdem zu kleinen Wert. Vgl. die bildliche Darstellung dieser Verhältnisse bei Schüle.²

In nachstehender Tabelle sind die nach Gl. (6a) für drei Stoffe berechneten Werte von $\operatorname{tg} \alpha$ den nach Schüle² experimentell bestimmten gegenübergestellt.

	H ₂	CO ₂	H ₂ O
$x = 1/k$	0,306	0,276	0,225
$\operatorname{tg} \alpha$ berechnet	5,54	6,248	7,9
$\operatorname{tg} \alpha$ gemessen	5,11	6,400	7,4

Die berechneten Werte von $\operatorname{tg} \alpha$ stimmen mit den gemessenen nur annähernd überein; doch ist der Gang beider Reihen der gleiche und der Vorteil ersichtlich, den die Einführung des kritischen Koeffizienten in die Zustandsgleichung mit sich bringt.

Verlauf der Isochoren im $p_x T_x$ -Diagramm.

In jedem Punkte der Dampfdruckkurve, z. B. Punkt 2, Abb. 1, schneiden sich zwei Isochoren, eine für das Flüssigkeitsvolumen v_x' , die andere für das Sattdampfvolumen v_x'' .

Oberhalb des Schnittpunktes liegt der stabile, aus dem $p t$ -Diagramm des Stoffes³ bekannte (voll ausgezogene) Teil der Isochoren, unterhalb des Schnittpunktes der homogene, den metastabilen und labilen Zuständen entsprechende (strichliert gezeichnete) Teil.

Im kritischen Punkt 1 fallen die beiden Isochoren in eine einzige zusammen, da dort $v_x' = v_x''$ wird. Die Tangente an die kritische Isochore ist zugleich Endtangente an die Dampfdruckkurve und unter dem $\angle \alpha$ gegen die Abszissenachse geneigt.

Gl. (3) ergibt für $v_x = \text{konstant}$ lineare Abhängigkeit des reduzierten Druckes p_x von der reduzierten Temperatur T_x , d. h. geradlinigen Verlauf der Isochoren im $p_x T_x$ -Diagramm.

Nach Gl. (4) erhält man für $v_x = \text{konst.}$ eine Beziehung zweiten Grades (Hyperbel), d. h. krummlinigen Verlauf der Isochoren. In der Nähe der absoluten Nulltemperatur widerspricht aber ein Isochorenverlauf

sowohl nach Gl. (3) als auch nach Gl. (4) dem Nernstschen Wärmesatz, wonach jede Temperaturfunktion, also auch p_x für konstantes v_x bei der absoluten Nulltemperatur eine zur $(T_x = 0)$ -Achse \perp Tangente haben muß.

Die Isochoren müssen sonach in Abb. 1 unter rechtem Winkel in die p_x -Achse einmünden bzw. $\left(\frac{\partial p_x}{\partial T_x} \right)_{v_x}$ muß bei $T_x = 0$ für alle Isochoren gleich Null sein.

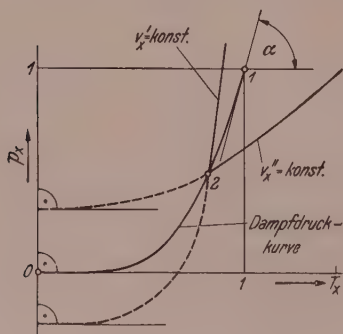


Abb. 1. Schema eines $p_x T_x$ -Diagrammes.

Einführung von Temperaturfunktionen.

Um dem Wärmesatz zu genügen, kann man die dimensionslose Temperatur T_x in allen drei Gliedern durch Temperaturfunktionen ϑ_{1x} , ϑ_{2x} , ϑ_{3x} ersetzen, welche über T_x aufgetragen, bei $T_x = 0$ eine waagrechte Tangente haben, deren Funktionswert sich also unterhalb einer gewissen Temperatur (z. B. des Schmelzpunktes) nicht mehr wesentlich ändert.

Bei $T_x = 1$ müssen die drei Temperaturfunktionen, um den früheren Ansätzen zu genügen, gleich 1 sein und bei $T_x = 1$ eine unter 45° geneigte Tangente haben, wenn auch Gl. (6a) aufrecht bleiben soll.

Als Beispiel für eine Lösung sei die Kombination einer Hyperbel mit einer e -Potenz angeführt (Abb. 2).

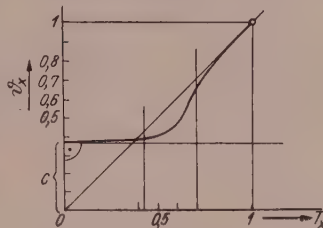


Abb. 2. Verlauf der Temp.-funktion nach Gl. (7).

$$\vartheta_x = \left(\sqrt[4]{T_x^4 + C^4} - C \right) e^{-\frac{c}{T_x^4}} + C. \quad (7)$$

Setzt man fest, daß die Abweichung bei T_{0x} (z. B. beim kritischen Punkt) beginnen und die e -Potenz dort den Wert 0,97 erreicht haben soll, so wird:

$$e^{-\frac{c}{T_{0x}^4}} = 0,97 \quad \text{und} \quad \vartheta_x = \left(\sqrt[4]{T_x^4 + C^4} - C \right) 0,97 \frac{T_{0x}^4}{T_x^4} + C.$$

Da ϑ_x bei T_{0x} mit T_{0x} identisch sein soll, wird weiter:

$$T_{0x} = \left(\sqrt[4]{T_{0x}^4 + C^4} - C \right) 0,97 + C,$$

woraus sich der Endwert C für jedes T_{0x} berechnen läßt. Für $T_{0x} = 1$ (wenn also die Abweichung im kritischen Punkt beginnen soll) wird: $c = 0,37$ und der Funktionswert

$$\begin{array}{ccc} \vartheta_x = 0,6535 & 0,3918 & 0,370 \\ \text{für } T_x = 0,7 & 0,422 & 0 \end{array}$$

Auch die Temperaturfunktion ϑ_{1x} (des ersten Gliedes) muß beim absoluten Nullpunkt eine waagrechte Tangente haben, gleichzeitig aber der Gasgleichung $p v = R T$ bis herab zu sehr tiefen (auch unter kritischen) Temperaturen genügen. Die Abweichung von der Geraden kann daher bei ihr erst unmittelbar vor dem Nullpunkt erfolgen (Gasentartung) und der Endwert C muß gleich Null sein. Praktisch kann man statt ϑ_{1x} auch T_x setzen.

Damit wird z. B. für Wasserdampf (H_2O) und $T_x = 0$, wenn $C_2 = 0,2$ und $C_3 = 0,37$ gewählt wird:

$$p_x = \frac{0,693}{0,2 \cdot v_x^2} - \frac{10,1}{0,37 v_x (v_x + 1,445)}, \quad (8c)$$

woraus sich die Druckabhängigkeit des Volumens bzw. die Kompressibilität des Stoffes bei $T_x = 0$ ergeben würde und die unter 3 genannte Unstimmigkeit wenigstens grundsätzlich behoben wäre.

Für den Druck Null und $T_x = 0$ würde man erhalten:

$$\frac{3,465}{v_x^2} = \frac{27,3}{v_x (v_x + 1,445)} \quad \text{oder} \quad v_x = 0,211.$$

2. Beispiel: Nullpunktsisotherme für CO_2 . Mit $C_2 = 0,25$ und $C_3 = 0,37$ wird:

$$p_x = \frac{6,425}{v_x^2} - \frac{18,6}{v_x (v_x + 0,6235)}, \quad (8d)$$

woraus sich das spezifische Volumen des Stoffes bei $p_x = 0$ und $T_x = 0$ zu $v_x = 0,328$

$v_x =$	0,3	0,328	0,4	0,5	0,6	0,7	1	2	3	5	7
$p_x =$	4,2	0,0	-5,4	-7,4	-7,45	-7,0	-5,025	-1,945	-0,996	-0,405	-0,217

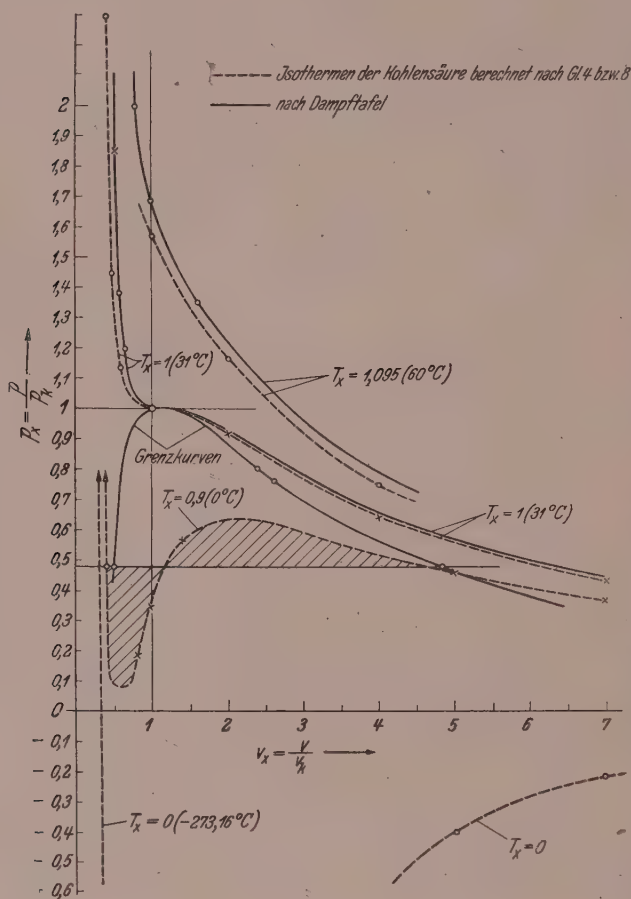


Abb. 3.

ergeben würde. Der sonstige Verlauf der Nullpunktsisotherme nach Gl. (8d) ist aus vorstehender Tabelle und zum Teil aus Abb. 3 ersichtlich.

Für die Temperaturfunktionen ϑ_{2x} und ϑ_{3x} können natürlich auch andere und voneinander verschiedene mathematische Beziehungen, wenn sie den angeführten Bedingungen entsprechen, gewählt werden.

Zusammenfassung.

Durch Einführung des kritischen Koeffizienten wird erreicht, daß die dimensionslose Zustandsgleichung für sehr große Volumina in die Gasgleichung übergeht und die Dampfdruckkurven im kritischen Punkt verschieden geneigte Endtangente bekommen. Weiters wird ein Ausweg angegeben, wie man durch Verwendung von Temperaturfunktionen an Stelle der absoluten Temperaturen die Anpassung des Isochorenverlaufes an den Wärmesatz erzielen könnte.

C. Untersuchung einer dritten Form der Zustandsgleichung.

Legt man die Exponenten von v im Abstoßungs- und Kohäsionsglied nicht von vornherein als ganzzahlig fest, so ergibt sich folgende Formel:

$$p = \frac{R T}{v} + \frac{b}{v^n} - \frac{a}{v^m}. \quad (10)$$

Da nun vier Konstante, nämlich b , a , n und m zur Verfügung stehen, aber nur drei Bedingungsgleichungen zu erfüllen sind, so bleibt einer der beiden Exponenten m und n frei wählbar.

Auch kann man eine Beziehung zwischen den beiden Exponenten vorschreiben und dann beide aus den drei Bedingungsgleichungen berechnen. Schreibt man z. B. vor, daß der Exponent m des Kohäsionsgliedes um 1 kleiner sein soll als der Exponent n des „molekularen Abstoßungsgliedes“, so wird $m = n - 1$. Man erhält eine Sonderform der allgemeinen Gl. (10), und zwar:

$$p = \frac{R T}{v} + \frac{b}{v^n} - \frac{a}{v^{n-1}} = \frac{R T}{v} - \frac{a}{v^n} \left(v - \frac{b}{a} \right). \quad (11)$$

Diese Sonderform ist bereits im Akademischen Anzeiger Nr. 11 von 1943 ausführlich behandelt.¹

Aus den drei Bedingungsgleichungen I, II und III ergibt sich der Zusammenhang zwischen n und m nach der allgemeinen Gl. (10) (aus einer quadratischen Gleichung) wie folgt:

$$n = -\frac{1}{2} \left(\frac{m^3 + m^2 - m - 1 - x m^3 - x m^2}{1 - m^2 + x m^2 + x m} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{m^3 + m^2 - m - 1 - x m^3 - x m^2}{1 - m^2 + x m^2 + x m} \right)^2 + \frac{(m^3 - m)}{(1 - m^2 + x m^2 + x m)}}. \quad (12)$$

Ein zweiter Sonderfall von Gl. (10) entsteht, wenn man den Exponenten m des Kohäsionsgliedes wie bei van der Waals mit 2 festsetzt.

Aus Gl. (12) erhält man in diesem Falle für n und das positive Vorzeichen:

$$n = \frac{-2}{2(2x-1)} = \frac{1}{1-2x}$$

und für das negative Vorzeichen:

$$n = \frac{8x-4}{2(2x-1)} = \frac{4(2x-1)}{2(2x-1)} = 2.$$

Mit $n = 2$ und $m = 2$ würde Gl. (10) die Form annehmen:

$$p = \frac{RT}{v} + \frac{(b-a)}{v^2},$$

d. h. zu einer quadratischen Gleichung werden, so daß das negative Vorzeichen nicht brauchbar ist.

Mit $n = \frac{1}{1-2x}$ erhält man für die beiden Konstanten a und b :

$$a = \frac{p_k v_k^2}{(4x-1)} \quad \text{und} \quad b = \frac{v_k^n p_k (1-2x)^2}{x(4x-1)}.$$

Die dimensionslose Zustandsgleichung für den zweiten Sonderfall ($m = 2$) lautet dann:

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x} - \frac{1}{(4x-1) v_x^2} + \frac{(1-2x)^2}{x(4x-1) v_x^n}. \quad (14)$$

Sie enthält außer den drei Zustandsvariablen p_x , v_x , T_x wieder nur den kritischen Koeffizienten k bzw. dessen Reziprokwert $x = 1/k$.

Aus Gl. (14) ergeben sich für verschiedene Stoffe wieder spezielle Zustandsgleichungen, wie z. B. für Kohlensäure (CO_2) mit $x = 0,276$:

$$p_x = 3,625 \frac{T_x}{v_x} - \frac{9,62}{v_x^2} + \frac{7}{v_x^{2,28}} \quad (14b)$$

oder für Wasserstoff (H_2) mit $x = 0,306$:

$$p_x = 3,27 \frac{T_x}{v_x} - \frac{4,465}{v_x^2} + \frac{2,195}{v_x^{2,578}}. \quad (14c)$$

Für Stoffe mit $x < 0,25$ wird die Differenz $(4x-1)$ negativ und die Glieder 2 und 3 der rechten Seite von Gl. (14) vertauschen ihr Vorzeichen; so lautet z. B. Gl. (14) für Wasser mit $x = 0,225$:

$$p_x = 4,45 \frac{T_x}{v_x} + \frac{10}{v_x^2} - \frac{13,45}{v_x^{1,82}}. \quad (14d)$$

Für Stoffe mit $x = 0,25$ ergibt sich die Schwierigkeit, daß die Differenz $(4x-1) = 0$ und der äußere Druck p_x unendlich groß wird. (Allerdings ist es unsicher, ob derartige Stoffe überhaupt existieren.)

Für große Volumina v_x geht Gl. (14) wieder in die dimensionslose Gasgleichung

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x}$$

über, so daß der Isothermenverlauf bei geringer Dichte dem wirklichen Verhalten genau entspricht.

Berücksichtigt man die Temperaturabhängigkeit des zweiten und dritten Gliedes rechts in erster Näherung durch den Ansatz:

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x} - \frac{1}{T_x (4x-1) v_x^2} + \frac{(1-2x)^2}{T_x x (4x-1) v_x^n}, \quad (15)$$

so wird die Anfangsneigung der Dampfdruckkurve im $p_x T_x$ -Diagramm (Abb. 1)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{\partial p_x}{\partial T_x} \right)_{\substack{v_x=1 \\ T_x=1}} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{4x-1} - \frac{(1-2x)^2}{x(4x-1)} = \frac{9x-2-4x^2}{x(4x-1)} = \frac{(4x-1)(2-x)}{x(4x-1)} = \\ &= \frac{2}{x} - 1 = 2k - 1. \end{aligned}$$

Man erhält also die gleiche Anfangsneigung, wie sie aus Gl. (6) für die Gleichungsform B errechnet wurde.

Gl. (14) hat gegenüber Gl. (3) den Nachteil, daß der Exponent n von v im letzten Glied rechts nicht mehr ganzzahlig, sondern gebrochen ist; die Gleichung ist daher nicht von dritter oder vierter, sondern unter Umständen von weit höherer Ordnung. Neben dem kritischen Punkt als Wendepunkt kann die kritische Isotherme in der Umgebung des kritischen Punktes noch zwei weitere Wendepunkte haben und unzulässige Überhöhungen oder Täler aufweisen. Trotz genauer Erfüllung der Bedingungs-gleichungen I, II und III kann also Gl. (14) nicht mehr als theoretisch richtige Zustands-gleichung gelten, da sie den thermodynamischen Bedingungen einer solchen nicht im ganzen Zustandsgebiet entspricht.

Unter Berücksichtigung dieses Umstandes kann man auch die Bedingung III weglassen, d. h. von der kritischen Isotherme im kritischen Punkt nur die Erfüllung der Bedingung I und II (horizontale Tangente) verlangen. In diesem Falle kann der Exponent n von v beliebig (jedoch > 2) gewählt werden und man erhält die dimensionslose Gleichung:

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x} - \frac{(n-1-xn)}{x(n-2) v_x^2} + \frac{(1-2x)}{x(n-2) v_x^n}. \quad (16)$$

Mit $n = 2,666 = 2\frac{2}{3}$ lautet z. B. Gl. (16) für CO_2 mit $x = 0,276$:

$$p_x = 3,625 \frac{T_x}{v_x} - \frac{5,055}{v_x^2} + \frac{2,432}{v_x^{2,666}} \quad (16d)$$

oder für Wasserdampf (H_2O) mit $x = 0,225$ und $n = 2,666$:

$$p_x = 4,45 \frac{T_x}{v_x} - \frac{7,12}{v_x^2} + \frac{3,67}{v_x^{2,666}}. \quad (16c_1)$$

Eine Variationsmöglichkeit besteht noch darin, daß man den Exponenten n für die unterkritischen Volumina ($v_x < 1$) anders, z. B. kleiner wählt als für die überkritischen ($v_x > 1$). Wählt man z. B. für Wasserdampf (H_2O) den Exponenten n nur mit 2,166, so wird:

$$p_x = 4,45 \frac{T_x}{v_x} - \frac{18,12}{v_x^2} + \frac{14,67}{v_x^{2,166}}. \quad (16c_2)$$

Wenn man die beiden letzten Glieder von Gl. (16) zwecks Berücksichtigung ihrer Temperaturabhängigkeit wieder durch T_x dividiert, so wird die Anfangsneigung der Dampfspannungskurve im $p_x T_x$ -Diagramm (Abb. 1):

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{\partial p_x}{\partial T_x} \right)_{\substack{v_x=1 \\ T_x=1}} = \frac{1}{x} + \frac{n-1-xn}{x(n-2)} - \frac{(1-2x)}{x(n-2)}$$

oder:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n-2+n-1-xn-1+2x}{x(n-2)},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2n-4-xn+2x}{x(n-2)} = \frac{(n-2)(2-x)}{x(n-2)},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{x} - 1 = 2k - 1.$$

Es ergibt sich also dieselbe Anfangsneigung wie nach Gl. (15) oder (6a). Der Exponent n ist auf $\operatorname{tg} \alpha$ ohne Einfluß. Für $x = \frac{n-1}{2n}$ geht Gl. (16) wieder in Gl. (15) über (z. B. für $n = 2,666$ bei einem Stoff mit $x = 0,312$).

Dem früher erwähnten Nachteil von Gl. (14) oder (15) steht bei Gl. (16) der Vorteil gegenüber, daß nunmehr beide Exponenten (nur mit der Einschränkung $m > 2$, $n > 2$ und n verschieden von m) frei gewählt werden können, wodurch sich der Isothermenverlauf dem wirklichen (mit Ausnahme der kritischen Umgebung) weitgehend anpassen läßt, was an zwei Beispielen gezeigt werden soll.

1. Beispiel: Kritische Isotherme für CO_2 , $n = 2,666$ nach Gl. (16d).

$v \text{ dm}^3/\text{kg}$	30,0	20,0	15,0	8,44	5,0	2,156	1,42	1,346	1,202
$v_x = v/v_k$	13,93	9,29	6,97	3,92	2,308	1	0,659	0,625	0,558
p_x nach Gl. (16d) ...	0,2362	0,337	0,4295	0,66	0,8792	1	1,27	1,38	1,85
p a t a nach Gl. (16d)	17,75	25,3	32,2	49,5	66	75	95,1	103,2	138,8
p nach Tafel	18,00	26,0	33,0	50,0	66	75	90	100	150

2. Beispiel: Kritische Isotherme für (H_2O) nach Gl. (16c₁) und (16c₂).

	$n = 2,666$				$n = 2,166$			
$v \text{ dm}^3/\text{kg}$	56,145	25,21	14,34	3,04	2,209	1,82	—	—
$v_x = v/v_k$	18,46	8,30	4,725	1	0,727	0,6	0,5	—
p_x berechnet ...	0,22166	0,4461	0,6828	1	1,125	1,32	2,42	—
p berechnet	49,8	100,2	153,5	225,6	253	297	545	—
p nach Tafel ...	50,0	100,0	150,0	225,6	250	300	—	—

Zusammenfassung.

Es wird eine Zustandsgleichung mit Berücksichtigung des kritischen Koeffizienten, aber mit gebrochenem Exponenten von v im Kohäsions- und Abstoßungsglied angegeben. Da sie im kritischen Bereich den thermodynamischen Voraussetzungen nicht genügt, ist sie nur außerhalb dieses Bereiches als halbempirische Formel zu verwenden. Bei entsprechender Exponentenwahl läßt sich aber weitgehende Übereinstimmung mit dem wirklichen Isothermenverlauf erzielen, wie an zwei Beispielen gezeigt wird.

D. Anführung weiterer Beispiele.

Die Einführung des kritischen Koeffizienten in die Zustandsgleichung soll noch an drei weiteren Formeln, die bezüglich v vom dritten Grade sind, gezeigt werden.

$$1. \quad p = \frac{RT}{v} + \frac{c}{v^2(v+b)} - \frac{a}{v^2}. \quad (20)$$

Die drei Konstanten a , b , c ergeben sich in bekannter Weise zu:

$$a = p_k v_k^2 \left(\frac{1-3x}{x^2} + 3 \right), \quad b = v_k \left(\frac{1-3x}{x} \right), \quad c = p_k v_k^2 \frac{(1-2x)^3}{x^3}.$$

Damit wird die dimensionslose Form von Gl. (20):

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x} + \frac{(1-2x)^3}{x^3 v_x^2 \left(v_x + \frac{1-3x}{x} \right)} - \frac{1}{v_x^2} \left(\frac{1-3x}{x^2} + 3 \right). \quad (20a)$$

Für H_2O mit $x = 0,225$ ergibt sich z. B. die spezielle Zustandsgleichung:

$$p_x = 4,45 \frac{T_x}{v_x} + \frac{14,61}{v_x^2 (v_x + 1,444)} - \frac{9,425}{v_x^2}. \quad (20b)$$

Dividiert man zwecks Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit die beiden letzten Glieder wieder durch T_x und bestimmt $\operatorname{tg} \alpha$, so erhält man:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{\partial p_x}{\partial T_x} \right)_{\substack{v_x=1 \\ T_x=1}} = \frac{1}{x} - \frac{(1-2x)^3}{x^3 \left(1 + \frac{1-3x}{x} \right)} + \frac{1-3x}{x^2} + 3$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{x} - 1 = 2k - 1,$$

also dasselbe Resultat wie bei der Gleichungsform B und C.

Diese einfache Beziehung ergibt sich für alle Gleichungsformen, bei denen als erstes Glied rechts der „thermische Abstoßungsdruck“ $k T_x/v_x$ vorkommt.

Da für $v_x = 1$ und $T_x = 1$ auch $p_x = 1$ sein muß, wird:

$$1 = k - (k - 1).$$

Andererseits ist $\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\substack{v_x=1 \\ T_x=1}} = k + (k - 1) = 2k - 1$, da die beiden letzten Glieder beim Differenzieren nach T_x ihr Vorzeichen wechseln.

$$2. \quad p = \frac{R T}{v} + \frac{b}{v^2(v+c)} - \frac{a}{v(v+c)} \quad (21)$$

oder in anderer Form geschrieben:

$$p = \frac{R T}{v} + \frac{b - a v}{v^2(v+c)}.$$

Die Berechnung der drei Konstanten ergibt:

$$c = v_k \frac{(1-3x)}{x}, \quad b = R T_k v_k^2 x, \quad a = R T_k v_k \frac{(1-3x+3x^2)}{x}.$$

Die dimensionslose Form lautet:

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x} + \frac{x^2 - v_x(1-3x+3x^2)}{x(x v_x + 1 - 3x) v_x^2}. \quad (21a)$$

$\operatorname{tg} \alpha$ wird wieder:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{x} - \frac{(x^2 - 1 + 3x - 3x^2)}{x(1-2x)} = \frac{2-5x+2x^2}{x(1-2x)} = \frac{(1-2x)(2-x)}{x(1-2x)} = \frac{2}{x} - 1 = 2k - 1.$$

Aus Gl. (21a) ergibt sich die spezielle Zustandsgleichung z. B. für Wasserdampf mit $x = 0,225$:

$$p_x = 4,45 \frac{T_x}{v_x} + \frac{0,225 - 2,125 \cdot v_x}{(0,225 v_x + 0,325) v_x^2}. \quad (21b)$$

3. An dritter Stelle sei eine Formel angeführt, bei der die molekulare Abstoßung wie bei van der Waals vernachlässigt ist; in diesem Falle müssen alle drei Konstanten im Kohäsionsglied vereinigt werden; man erhält z. B. die Formel:

$$p = \frac{R T}{v} - \frac{a}{(v^2 + c v + b)} \quad (22)$$

und für die drei Konstanten die Beziehungen:

$$a = \frac{p_k v_k^2 (1-x)^3}{x^2}, \quad b = x v_k^2, \quad c = \frac{v_k}{x} (1-3x).$$

Die dimensionslose Form von Gl. (22) lautet:

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x} - \frac{(1-x)^3}{x^2 \left[v_x^2 + v_x \left(\frac{1-3x}{x} \right) + x \right]}. \quad (22a)$$

Für Wasserdampf ergibt sich die spezielle Zustandsgleichung:

$$p_x = 4,45 \frac{T_x}{v_x} - \frac{9,2}{v_x^2 + 1,445 v_x + 0,225}. \quad (22b)$$

Bei $T_x = 0$ wären nach dieser Gleichung nur negative Drücke, d. h. Zugbeanspruchungen möglich, was ein Widerspruch ist und die Notwendigkeit des dritten Gliedes rechts (des molekularen Abstoßungsgliedes) beweist.

Die Formeln (20b), (21b) und (22b) ergeben ähnliche Resultate wie die unter B angeführte Gl. (3c), wie aus nachstehender Tabelle ersichtlich ist.

Kritische Isotherme für Wasserdampf.

$v_x =$	0,6	1	4	10
p_x nach Gl. (20b) =	1,07	1	0,6915	0,3635
p_x „ „ (21b) =	1,095	1	0,6925	0,3636
p_x „ „ (22b) =	1,09	1	0,6930	0,3647
p_x „ „ (3c) =	1,115	1	0,6903	0,3636

E. Berücksichtigung der Assoziation.

Der kritische Koeffizient ist vermutlich davon abhängig, ob die Flüssigkeit eines Stoffes stärker assoziiert ist als der Dampf- bzw. Gaszustand.

So ist z. B. für das stark assoziierte Wasser $k = 4,45$, während es für Wasserstoff und Helium, bei denen die Flüssigkeit vermutlich nicht oder nur wenig assoziiert ist, nahe an 3 liegt.⁵

Nimmt man demgemäß an, daß die Steigerung von k über 3 hinaus nur durch die Assoziation der flüssigen Phase bedingt ist, so müßte für einen Stoff, dessen physikalisches oder scheinbares Molekulargewicht μ im ganzen Zustandsbereich dasselbe bleibt, der kritische Koeffizient $k = 3$ sein.

Die Zahl 3 wäre demnach die untere Grenze bzw. der kleinstmögliche Wert für k . In diesem Idealfall hätte man eine Zustandsgleichung zugrunde zu legen, die für den kritischen Koeffizienten die Zahl 3 ergibt.

Stellt man wieder die Bedingung, daß diese Zustandsgleichung bezüglich v vom dritten Grade sein und rechts drei Glieder aufweisen soll, so kommt man zu folgender einfachen Formel:

$$p = \frac{RT}{v} + \frac{b}{v^3} - \frac{a}{v^2}. \quad (23)$$

Die drei Konstanten R , a und b ergeben sich in bekannter Weise zu:

$$R = 3 \frac{p_k v_k}{T_k}, \quad a = 3 v_k^2 p_k, \quad b = v_k^3 p_k.$$

Nach Einsetzung dieser Ausdrücke in die Zustandsgleichung und entsprechender Umformung erhält man die dimensionslose Form von Gl. (23):

$$p_x = \frac{3 T_x}{v_x} + \frac{1}{v_x^3} - \frac{3}{v_x^2}. \quad (23a)$$

Wie vorausgesetzt, wird der kritische Koeffizient $k = \frac{R T_k}{p_k v_k} = 3$ oder $9/3$ (während er bei van der Waals nur $8/3 = 2,67$ beträgt, d. h. unter dem erwähnten Kleinstwert liegt).

Berücksichtigt man die Temperaturabhängigkeit des Kohäsions- und Abstoßungsdruckes durch den einfachen Ansatz:

$$p_x = \frac{3 T_x}{v_x} + \frac{1}{T_x v_x^3} - \frac{3}{T_x v_x^2}, \quad (23b)$$

so wird die Neigung der Dampfdruckkurve im kritischen Punkt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{\partial p_x}{\partial T_x} \right)_{v_x=1} = 3 - 1 + 3 = 5,$$

wodurch ein unterer Grenzwert für diese Neigung (im $p_x T_x$ -Diagramm) bestimmt

ist. So beträgt z. B. $\lg \alpha$ für Wasserstoff 5,11, während es für assoziierende Stoffe bedeutend höher liegt (z. B. für H_2O $\lg \alpha = 7,4$).

Gl. (23) ergibt sich auch aus der unter D angeführten Gl. (21), wenn man die Konstante c gleich Null setzt. Es wird dann:

$$c = v_k \left(\frac{1 - 3x}{x} \right) = 0 \quad \text{oder} \quad x = 1/3 \quad \text{und} \quad k = 3.$$

Die dimensionslose Form von Gl. (21) ist für $x = 1/3$ mit Gl. (23a) identisch.

Führt man das dimensionslose Molekulargewicht $\mu_x = \mu/\mu_k$ in die Rechnung ein, so wird für den Gaszustand bzw. sehr großes v_x

$$\mu_{x0} = \frac{\mu_0}{\mu_k} = \frac{848}{R \mu_k}$$

oder, da $k = \frac{R T_k}{p_k v_k}$ ist,

$$\mu_{x0} = \frac{848 \cdot T_k}{k p_k v_k \mu_k}$$

Gemäß obiger Annahme müßte nun der Ausdruck $\frac{848 T_k}{p_k v_k \mu_k}$ für alle Stoffe gleich groß, und zwar gleich 3 sein, so daß

$$\mu_{x0} = \frac{3}{k} \quad \text{oder} \quad \frac{\mu_k}{\mu_0} = \frac{k}{3} \quad (25)$$

wird.

Das physikalische Molekulargewicht müßte demnach durch die Assoziierung im kritischen Punkt im Verhältnis $k/3$ größer geworden sein als im Gaszustand (z. B. für H_2O im Verhältnis $4,45/3 = 1,483$), wobei weiters vorausgesetzt ist, daß der Gaszustand nicht assoziiert ist.

Das Molekulargewicht ist eine Funktion von v und T und ändert sich im allgemeinen mit v und T im gleichen Sinne.

$$\mu_x = \varphi(v_x, T_x).$$

Über den Verlauf von μ_x über v_x für die kritische Isotherme ($T_x = 1$) lassen sich nun zwei verschiedene Annahmen machen, und zwar:

a) μ_x ändert sich in der Umgebung des kritischen Punktes nicht; für $T_x = \text{konst.} = 1$ ist sowohl die erste Ableitung $\varphi' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_x} \right) = 0$ als auch die zweite Ableitung $\varphi'' = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_x^2} \right) = 0$. In diesem Falle kann man die veränderliche Größe μ_x in die Zustandsgleichung (23b) einführen, ohne hierdurch die Konstantenbestimmung zu verändern und erhält die Gleichung:

$$p_x = \frac{3 T_x}{\mu_x v_x} + \frac{1}{T_x v_x^3} - \frac{3}{T_x v_x^2}. \quad (26)$$

b) Das Molekulargewicht μ_x ist im kritischen Punkt längs der kritischen Isotherme ($T_x = 1$) mit v_x veränderlich ($\varphi' < 0$, $\varphi'' > 0$). Dann sind die Konstanten a und b in Gl. (23) neu zu bestimmen, wobei die Größen φ , φ' und φ'' als weitere Unbekannte hinzukommen.

Kennt man eine mathematische Formel für φ , die außer v und T noch mindestens eine Konstante c enthält, so lassen sich die Größen φ , φ' und φ'' berechnen bzw. durch c ausdrücken und die drei Konstanten a , b , c aus den drei Bedingungsgleichungen bestimmen, wobei die Gaskonstante R , wie erforderlich, frei wählbar bleibt.

In Abb. 4 ist die Form der Funktion $\psi = 1/\varphi$ für die beiden Fälle a und b schematisch dargestellt. Für den Gaszustand wird $\psi_0 = 1/\varphi_0 = \mu k/\mu_0 = k/3$.

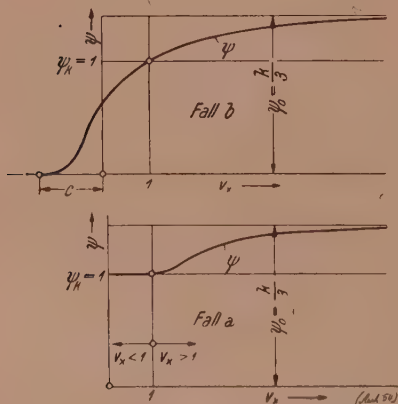


Abb. 4. Beispielsweiser Verlauf der Funktion $\psi = 1/\varphi$ über v_x .

Im Falle b könnte z. B. die Formel:

$$\psi = \psi_0 e^{-\frac{\theta}{v_x + c}}$$

als mathematischer Ausdruck für die Funktion ψ in Frage kommen.

Im Falle a läßt sich die Form der Funktion $\psi = 1/\mu_x$ nach Gl. (26) feststellen, wenn der Verlauf der kritischen Isotherme experimentell bestimmt bzw. bekannt ist. Nach Gl. (26) ist nämlich:

$$\psi = 1/\mu_x = \left(p_x' - \frac{1}{v_x^3} + \frac{3}{v_x^2} \right) v_x / 3, \quad (26a)$$

wobei p_x' den bekannten, z. B. aus der Dampf-
entnommenen Druck (geteilt durch den kritischen
Druck) bedeutet.

Die so berechneten Werte von ψ sind für
Wasserdampf aus nachstehender Tabelle ersicht-
lich und in Abb. 5 über v_x aufgetragen.

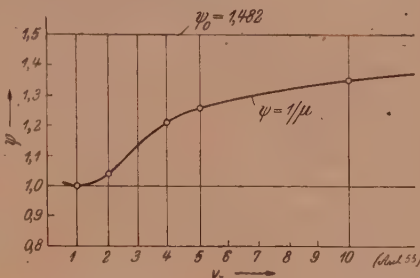


Abb. 5. Verlauf der Funktion $\psi = 1/\mu_x$
für H_2O nach Gl. (26 a).

$v_x =$	0,6	1	2	4	5	10	∞
p_x' aus Dampf- tafel	1,34	1	0,940	0,74	0,64	0,377	—
ψ nach Gl. (26a)	1,01	1	1,042	1,215	1,252	1,35	1,482

Es zeigt sich, daß die Annahmen $\psi' = 0$ und $\psi'' = 0$ für den kritischen Punkt
auch in Wirklichkeit zutreffen könnten, so daß durch entsprechende Auswahl einer
Formel für die Funktion ψ der Isothermenverlauf für H_2O unter Umständen genau
berechnet werden könnte.

Für unterkritische Volumina ($v_x < 1$) scheint nach obiger Tabelle $\psi = \text{konst.} = 1$
zu bleiben.

Für überkritische Volumina sei etwa folgende Formel angeführt:

$$\psi = \psi_0 - \left(\frac{3}{v_x} + \frac{1}{v_x^3} - \frac{3}{v_x^2} \right) \left(\frac{k-3}{3} \right) \quad (27)$$

oder mit $\psi_0 = k/3$

$$\psi = \frac{k}{3} \left[1 - \left(\frac{3}{v_x} + \frac{1}{v_x^3} - \frac{3}{v_x^2} \right) \left(\frac{k-3}{k} \right) \right].$$

Mit Gl. (26) wird:

$$p_x = \frac{k T_x}{v_x} \left[1 - \left(\frac{3}{v_x} + \frac{1}{v_x^3} - \frac{3}{v_x^2} \right) \left(\frac{k-3}{k} \right) \right] + \frac{1}{T_x v_x^3} - \frac{3}{T_x v_x^2} \quad (28)$$

oder:

$$p_x = \frac{k T_x}{v_x} - \frac{T_x}{v_x} \left(\frac{3}{v_x} + \frac{1}{v_x^3} - \frac{3}{v_x^2} \right) (k-3) + \frac{1}{T_x v_x^3} - \frac{3}{T_x v_x^2}.$$

Für $v_x = 1$ wird, wie vorausgesetzt, $p_x = 1$; für den Gaszustand erhält man wieder
die dimensionslose Gleichung des idealen Gases:

$$p_x = \frac{k T_x}{v_x},$$

da die Glieder mit v_x^2 bis v_x^4 im Nenner vernachlässigt werden können.

Gl. (27) erfüllt ferner die Bedingung, daß ψ' und auch ψ'' für den kritischen Punkt
gleich Null sein muß.

Für Wasserdampf wird:

$k = 4,45,$	$\frac{k-3}{3} = \frac{1,45}{3} = 0,483,$
$\psi_0 = k/3 = \frac{4,45}{3} = 1,483,$	$\frac{k-3}{k} = 0,326.$

und

$$\psi = 1,483 - \left(\frac{3}{v_x} + \frac{1}{v_x^3} - \frac{3}{v_x^2} \right) 0,483. \quad (27a)$$

Die nach Gl. (27a) für $v_x \geq 1$ berechneten Werte von ψ sind in nachstehender Tabelle den nach Gl. (26a) aus p_x' bestimmten Werten gegenübergestellt.

$v_x =$	1	2	4	5	10	∞
ψ aus p_x' berechnet.....	1	1,042	1,215	1,252	1,350	—
ψ nach Gl. (27a)	1	1,065	1,204	1,246	1,351	1,483
ψ nach Gl. (29)	1	1,036	—	1,252	1,362	1,483

Eine andere Formel für ψ und $v_x \geq 1$ wäre beispielsweise:

$$\psi = 1 + \left(\frac{k-3}{3} \right) e^{-\frac{\vartheta}{v_x-1}}, \quad (29)$$

worin für Wasserdampf $\vartheta = 2,6$ zu setzen ist. Die nach dieser Formel berechneten Werte von ψ sind ebenfalls in obiger Tabelle eingetragen.

Die Formeln (27) und (29) sind nur für überkritische Volumina ($v_x \geq 1$) verwendbar und versagen für $v_x < 1$.

Berücksichtigt man in Formel (27) die Temperaturabhängigkeit der Funktion ψ beispielsweise durch den Ansatz:

$$\psi = \frac{k}{3} - \left(\frac{3}{T_x v_x} + \frac{1}{v_x^3 T_x^n} - \frac{3}{T_x v_x^2} \right) \left(\frac{k-3}{3} \right). \quad (27b)$$

So wird die Neigung der Endtangente an die Dampfdruckkurve nach Gl. (28):

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{\partial p_x}{\partial T_x} \right)_{\substack{v_x=1 \\ T_x=1}} = 5 + n(k-3), \quad (30)$$

also speziell für $n = 3/2$ und Wasserdampf $\operatorname{tg} \alpha = 7,17$, während sich für nichtassoziierte Stoffe mit $k = 3$ wieder der untere Grenzwert 5 ergibt.

Durch obige Einführung der Temperatur in die ψ -Funktion wird gleichzeitig der Druck p_x der überkritischen Isotherme ($T_x > 1$) erhöht und dadurch eine bessere Anpassung an den wirklichen Verlauf erreicht.

Abschnitt E stellt einen Versuch zur Berücksichtigung der Assoziation (Bildung von Mehrfachmolekülen) in der Zustandsgleichung dar. Er basiert auf der Annahme, daß der kritische Koeffizient bei assoziierenden Stoffen nur deshalb größer als 3 wird, weil im Nenner der Beziehung:

$$k = \frac{848 \cdot T_k}{p_k v_k \mu_0}$$

das chemische Molekulargewicht μ_0 statt des wirklich im kritischen Zustand vorhandenen physikalischen Molekulargewichtes μ_k steht.

Gleichbedeutend damit ist aber die Annahme, daß der Ausdruck:

$$\frac{848 T_k}{p_k v_k \mu_k}$$

für alle Stoffe einheitlich gleich 3 ist.

F. Temperaturfunktion und Boyle-Temperatur.

Berücksichtigt man in Gl. (23a) für Stoffe mit $k = 3$ die Temperaturabhängigkeit der zwei letzten Glieder auf andere Weise als in Gl. (23 b), z. B. durch den Ansatz

$$p_x = \frac{3 T_x}{v_x} + \frac{\left(\gamma + e^{-\frac{\tau}{T_x}} \right)}{v_x^3} - \frac{3 \left(\alpha - \beta e^{-\frac{\tau}{T_x}} \right)}{v_x^2}, \quad (31)$$

so wird bei konstantem Volumen der Abstoßungsdruck (wie es natürlich ist) mit steigender Temperatur größer, während der Kohäsionsdruck zunächst abnimmt, bei der Boyle-Temperatur (T_{xB}) gleich Null wird und sich nach Überschreitung dieser Temperatur in einen Abstoßungsdruck verwandelt, so daß bei $T_x > T_{xB}$ in Gl. (31) überhaupt keine Anziehungskräfte mehr vorkommen.

Die beiden Temperaturfunktionen

$$\vartheta_{1x} = \gamma + e^{-\frac{\tau}{T_x}} \quad \text{und} \quad \vartheta_{2x} = \alpha - \beta e^{-\frac{\tau}{T_x}}$$

entsprechen zunächst der unter B angeführten Bedingung, daß sie im absoluten Nullpunkt eine zur $T_x = 0$ -Achse senkrechte Tangente haben müssen.

1. Für die kritische Temperatur $T_x = 1$ müssen die Temperaturfunktionen den Wert 1 annehmen, so daß

$$\gamma = 1 - e^{-\tau} \quad \text{und} \quad \alpha = 1 + \beta e^{-\tau}$$

wird.

2. Für den kritischen Punkt soll sich der kleinste vorkommende Wert⁶ von $\lg \alpha$ ergeben:

$$\lg \alpha_{\min} = 3 + e^{-\tau} \cdot \tau (1 + 3\beta).$$

Durch obige drei Gleichungen sind drei der vier Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \tau$ festgelegt, während eine von ihnen, z. B. τ , frei wählbar bleibt; wählt man z. B. willkürlich

$$e^{-\tau} = 0,1 \quad \text{oder} \quad \tau = 2,3026 \quad \text{und} \quad \lg \alpha_{\min} = 4,61,$$

so wird

$$\gamma = 0,9 \quad |\beta = 2| \quad \text{und} \quad \alpha = 1,2.$$

Für die Boyle-Temperatur ist nun

$$\alpha = \beta e^{-\frac{\tau}{T_{xB}}}, \quad (32)$$

woraus sich nach Einsetzung obiger Werte die Boyle-Temperatur für Stoffe mit $k = 3$ zu

$$T_{xB} = \frac{-0,4343 \cdot \tau}{\log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = 4,51 \quad (32a)$$

ergeben würde (während der beobachtete Wert⁵ für Wasserstoff 3,28 und für Helium 4,34 ist). Aus der van der Waalsschen Zustandsgleichung ergibt sich hingegen für alle Stoffe die reduzierte Boyle-Temperatur zu

$$T_{xB} = \frac{27}{8} = 3,375.$$

Das reduzierte Volumen des Stoffes bei der absoluten Nulltemperatur und dem Druck Null wird nach Gl. (31): $\left|v_{x0} = \frac{\gamma}{3\alpha}\right|$, also z. B. für $\tau = 2,3026$:

$$v_{x0} = \frac{0,9}{3 \cdot 1,2} = 0,25.$$

Berücksichtigt man, daß das normale Volumen der Flüssigkeit³ (bei Erstarrungstemperatur) für Helium $= v_K/2,24 = 0,447 v_k$ ist, so müßte der Stoff bei Abkühlung auf den Nullpunkt von 0,447 auf 0,25 v_k zusammenschrumpfen.

Schreibt man Gl. (31) in der Form

$$\frac{p_x v_x}{3 T_x} = \frac{p v}{R T} = 1 + \frac{1}{3 T_x} \left\{ \frac{\left(\gamma + e^{-\frac{\tau}{T_x}} \right)}{v_x^2} - \frac{3 \left(\alpha - \beta e^{-\frac{\tau}{T_x}} \right)}{v_x} \right\}, \quad (33)$$

so erkennt man, daß der dimensionslose Ausdruck $\frac{p v}{R T}$ für Temperaturen oberhalb

der Boyle-Temperatur stets größer als 1 sein muß, da auch das zweite Glied in der geschlungenen Klammer in diesem Falle > 0 wird.

Für $T_x < T_{xB}$ kann jedoch $\frac{p v}{R T}$ auch 1 oder < 1 werden, wie dies auch bei Luft oder Wasserstoff beobachtet ist (s. z. B. Hütte, 26. Aufl., I. Bd., S. 512 und 513).

Eine allgemein, d. h. auch für Stoffe mit $k > 3$ gültige Beziehung wird aus Gl. (31) dadurch erhalten, daß man das erste Glied rechts mit der ψ -Funktion nach Gl. (27) oder (29) und die e -Potenzen im zweiten und dritten Glied rechts mit dem Faktor $(k-2)$ vervielfacht, wodurch auch die Abhängigkeit der Boyle-Temperatur von k zum Ausdruck kommt.⁶

Aus Beobachtungen ergibt sich, daß der Grad der „Dissozierung“ $\psi = 1/\mu_x$ etwa nach der Beziehung:

$$\psi = 1 + \frac{(k-3)}{3} e^{-\frac{\vartheta}{v_x T_x^4 - 1}} \quad (34)$$

temperaturabhängig ist. Ist für einen bestimmten Zustand v_x und T_x gegeben, so läßt sich nach Gl. (34) (falls die gemachten Annahmen zutreffen) ψ für jeden beliebigen Stoff berechnen. Mit den Temperaturfunktionen:

$$\vartheta_2 = \gamma + (k-2) e^{-\frac{\tau}{T_x}} \text{ und } \vartheta_3 = \alpha - (k-2) \beta e^{-\frac{\tau}{T_x}} \quad (35)$$

lautet die reduzierte Zustandsgleichung:

$$p_x = \frac{3 T_x \psi}{v_x} + \frac{\vartheta_2}{v_x^3} - \frac{3 \vartheta_3}{v_x^2}, \quad (36)$$

in der (außer den drei Zustandsvariablen $p_x v_x T_x$) nur der kritische Faktor k als Parameter vorkommt.

Die Abweichungen vom Gasgesetz ergeben sich wieder analog Gl. (33) nach der Formel:

$$\frac{p v}{R T} = \frac{p_x v_x}{k T_x} = \frac{3 \psi}{k} + \frac{1}{k T_x} \left(\frac{\vartheta_2}{v_x^3} - \frac{3 \vartheta_3}{v_x} \right). \quad (37)$$

Für Zustände, bei welchen die Temperatur und das Volumen derart hoch sind, daß $v_x T_x^4$ etwa > 30 und daher [nach Gl. (34)] $\psi = k/3$ ist, läßt sich Gl. (37) auch schreiben:

$$\frac{p v}{R T} = 1 + \frac{1}{k T_x} \left(\frac{\vartheta_2}{v_x^3} - \frac{3 \vartheta_3}{v_x} \right). \quad (38)$$

So wird z. B. für Wasserstoff mit $k = 3,27$, $|k-2| = 1,27$

$$\beta = 2, \quad |\alpha| = 1,254, \quad |\tau| = 2,3025 \quad \text{und} \quad \gamma = 0,873:$$

Die Boyle-Temperatur $T_{xB} = 3,27$ (während in Quelle⁵ hierfür der Wert 3,28 angegeben ist).

Die Abweichung vom Gasgesetz wird z. B. bei 0°C und 100 ata mit $T_x = 8,25$, $|v_x| = 3,805$, $\vartheta_3 = -0,666$ und $\vartheta_2 = 1,63$ nach Gl. (38):

$$\frac{p v}{R T} = 1 + \frac{1}{3,27 \cdot 8,52} \left(\frac{1,63}{14,5} - \frac{3 \cdot 0,666}{3,805} \right) = 1,02345,$$

während hierfür in Hütte, 26. Aufl. der Wert 1,0625 angegeben ist. Hingegen ist z. B. für H_2O und niedrige reduzierte Temperaturen ($t \leq 550^\circ$ bzw. $T_x \leq 1,271$) die Übereinstimmung mit den Erfahrungswerten wesentlich besser.

Nach den VDI-Wasserdampfatafeln 1937 ist mit $v_k = 3,07$ (derzeit wahrscheinlichster Wert), $p_k = 225,1$ ata, $T_k = 647,16^\circ \text{K}$:

$$k = 4,407, \quad \psi = 1 + 0,469 e^{-\frac{2,509}{v_x T_x^4 - 1}}, \quad \psi_{\max} = k/3 = 1,469,$$

$$\vartheta_2 = 0,7593 + 2,407 e^{-\frac{2,3025}{T_x}}, \quad \vartheta_3 = 1,4814 - 4,814 e^{-\frac{2,3025}{T_x}}.$$

Die Abweichungen der so berechneten Werte von den Dampftafelwerten sind aus nachstehender Tabelle ersichtlich.

ata	°C	v nach Tafel	v_x	T_x	p_x berechnet	p_x nach Tafel	Differenz
290	530	0,01023	3,3323	1,2411	1,3109	1,2883	+ 1,76%
220	530	0,01445	4,7069	1,2411	0,99064	0,97732	+ 1,36%
220	390	0,00777	0,41328	1,0247	0,9544	0,97732	— 2,35%
100	530	0,03519	11,463	1,2411	0,44727	0,44424	+ 0,68%
100	390	0,02637	8,5896	1,0247	0,444737	0,44424	+ 0,089%
10	530	0,3754	122,28	1,2411	0,044433	0,044424	+ 0,02%
10	390	0,3077	100,23	1,0247	0,0444416	0,044424	+ 0,04%
10	250	0,2375	77,36	0,80838	0,044343	0,044424	— 0,182%
1	530	3,777	1230,3	1,2411	0,0044428	0,0044424	+ 0,0128%
1	390	3,116	1014,98	1,0247	0,0044433	0,0044424	+ 0,0218%
1	250	2,453	799,02	0,80838	0,0044388	0,0044424	— 0,08%
1	100	1,730	563,53	0,57663	0,0044484	0,0044424	+ 0,137%

Nach der für Wasserdampf und ϑ_3 angegebenen Beziehung wäre die Boyle-Temperatur $T_{Bx} = 1,95$, $T_B = 1260^\circ \text{K.}$ oder $t_B = 987^\circ \text{C.}$ was nach den bekannten JS-Diagrammen auch wahrscheinlich ist.

Für hohe Temperaturen scheint Formel (35) zu kleine Werte für ϑ_2 und ϑ_3 zu ergeben. Da die e -Potenz nur den Wert 1 erreichen kann, sind die Temperaturfunktionen nach oben bzw. unten hin begrenzt, was unwahrscheinlich ist (z. B. für H_2 $\vartheta_{2\text{max}} = 2,143$ und $\vartheta_{3\text{min}} = -1,286$).

Größere Minima und horizontale Tangente bei $T_x = 0$ ergibt z. B. die Beziehung:

$$\vartheta_3 = 1,7 - 7e^{-\frac{2,3025}{T_x^n}} \quad (39)$$

($\vartheta_{3\text{min}} = -5,3$). Nach oben bzw. unten nicht begrenzte Funktionen von T_x stellen z. B. die Gleichungen:

$$\vartheta_2 = 1 + 0,12(T_x - 1)^2 \quad (40)$$

und

$$\vartheta_3 = (\alpha' - \beta' T_x^n) \quad (41)$$

dar, wobei der Exponent n vom kritischen Faktor k abhängt und für

etwa	$k = 3$	3,27	3,63	und 4,45
	$n = 0,333$	0,4	0,5	und 0,9 oder 1

beträgt, während $\alpha' = 1,6$ bzw. $\beta' = 2,6$ für alle Stoffe gleich groß ist.

Gl. (40) gilt nur für $T_x > 1$, während für unterkritische Temperaturen ($T_x < 1$) die Temperaturfunktion ϑ_2 konstant = 1 bleibt.

Die Temperaturfunktion ϑ_3 läßt sich z. B. auch durch die Beziehung $\vartheta_3 = 1 - a(T_x - 1)^a$ für $T_x > 1$ und $\vartheta_3 = 1 + b(1 - T_x^3)$ für $T_x < 1$ darstellen, wobei die Konstanten a und b wieder von k abhängen und ϑ_3 im kritischen Punkt eine Spitze oder Unstetigkeit aufweist. ($a \doteq 1,11$ | $0,75$ | $0,6$ | für H_2O , CO_2 , H_2 und $b \doteq 1$ | $0,33$ | für H_2O , CO_2 .)

In ähnlicher Weise kann auch die van der Waalsche Zustandsgleichung (1a) durch Einführung von:

$$\psi' = 1 + (3k/8 - 1)e^{-\frac{\phi}{v_x T_x^4 - 1}} \quad (34a)$$

erweitert werden und lautet dann:

$$p_x = \frac{8 T_x \psi'}{(3 v_x - 1)} - \frac{3}{v_x^2} \quad (1b)$$

Für große Volumina und nicht allzu tiefe Temperaturen geht Gl. (1b) in die Gleichung des idealen Gases:

$$p_x = \frac{3 T_x k}{(3 v_x - 1)} \quad \text{oder} \quad p_x = \frac{k T}{(v_x - 1/3)}$$

über, da für große v_x der Betrag $1/3$ vernachlässigt werden kann. [Dieser Betrag läßt sich übrigens auch zum Verschwinden bringen, wenn in Gl. (1b) der Ausdruck:

$$(3 v_x - 1) \quad \text{durch} \quad \left(3 v_x - 1 + e^{-\frac{\phi}{v_x T_x^4 - 1}} \right)$$

ersetzt wird. Die Boyle-Temperatur wird nach Gl. (1b) $T_{xB} = \frac{27}{8\phi}$, sonach für $k > 3$ (z. B. CO_2) kleiner als 27/8 oder 3,375, was dem wirklichen Verhalten nahekommt. Dasselbe gilt von der Inversionstemperatur bei $p_x = 0$, die nach Gl. (1b) für $k > 3$ ebenfalls kleiner als 27/4 oder $< 6,75$ wird.]

Die starke Zunahme des Abstoßungsdruckes bei großer Annäherung der Moleküle (v_x etwa $< 0,5$) kommt weder in Gl. (36) noch in Gl. (42), wohl aber in der van der Waalsschen Gl. (1a) (durch das „Kovolumen“) zum Ausdruck. Sie läßt sich in Gl. (36) bzw. (42) durch Multiplikation des zweiten Gliedes rechts mit einer zusätzlichen Volumenfunktion φ von v_x (oder v_x/ψ), z. B. $\varphi = [1 + a(b - v)]^3$, berücksichtigen, die erst bei $v_x < b$ zur Wirkung kommt, wobei a und b (etwa $= 0,5$) vermutlich wieder durch k bestimmt sind.

Bei näherer Betrachtung erweist sich indessen Gl. (36) in theoretischer Hinsicht als unbefriedigend, da im ersten Glied rechts das reduzierte Molvolumen $V_x = \mu_x v_x = v_x/\psi$ vorkommt, während die beiden anderen Glieder das reduzierte kg-Volumen v_x enthalten. Nach Ansicht des Verfassers ist es theoretisch richtiger, auch im zweiten und dritten Glied rechts von Gl. (23) [bzw. (23a)] das Molvolumen V_x an Stelle des kg-Volumens v_x zu verwenden. Gleichbedeutend damit ist die bekannte bzw. übliche Annahme,⁵ daß das Korrespondenzprinzip nur bei Bezugnahme auf das „Molvolumen“ genau erfüllt wird. Gl. (23) lautet dann in reduzierter Form:

$$p_x = 3 T_x \left(\frac{\psi}{v_x} \right) + \left(\frac{\psi}{v_x} \right)^3 \vartheta_2 - 3 \left(\frac{\psi}{v_x} \right)^2 \vartheta_3, \quad (42)$$

wobei ψ eine Art „Dissoziationsgrad“ bedeutet (für den kritischen Punkt $= 1$).

Die Abhängigkeit der dimensionslosen Größe ψ von v_x läßt sich für die kritische Isotherme ($\vartheta_2 = \vartheta_3 = 1$) z. B. des Wasserdampfes an Hand der VDI-Wasserdampf- tafeln feststellen. Man gelangt hierbei zur Beziehung:

$$\psi = 1 + \left(\frac{k-3}{3} \right) e^{-\frac{0,475}{v_x T_x^4 - 1}}, \quad (43)$$

die natürlich andere ψ -Werte liefert als Gl. (34).

Die Abweichung vom Gasgesetz beträgt nach Gl. (42) im allgemeinen:

$$\frac{p v}{R T} = \frac{p_x v_x}{k T_x} = \frac{3 \psi}{k} + \frac{\psi}{k T_x} \left(\frac{\vartheta_2 \psi^3}{v_x^2} - \frac{3 \vartheta_3 \psi}{v_x} \right) \quad (44)$$

und für $v_x T_x^4 > 50$ bzw. $\psi = k/3$:

$$\frac{p v}{R T} \equiv 1 + \frac{1}{3 T_x} \left(\frac{\vartheta_2 k^3}{9 v_x^2} - \frac{\vartheta_3 k}{v_x} \right) \quad (45)$$

Für Wasserstoff ergeben sich aus Gl. (45) mit ϑ_2 nach Gl. (40), ϑ_3 nach Gl. (41) und $k = 3,27$ etwa die in Hütte, 26. Aufl., Bd. I, S. 513, angegebenen Werte, aus denen auch Gl. (40) abgeleitet wurde.

ϑ_2 , ϑ_3 und ψ sind empirisch zu bestimmen, so daß Gl. (42) nur als halbempirische Formel gelten kann.

Mit ϑ_3 nach Gl. (41) ergeben sich für H_2O und CO_2 die aus nachstehender Tabelle ersichtlichen Abweichungen der berechneten Drücke von den Dampf- tafelwerten.

für CO ₂	T_x	v_x	p_x berechn.	p_x Tafel	für H ₂ O	T_x	v_x	p_x berechn.	p_x Tafel
100 ata, 150° C	1,39	3,29	1,291	1,33	100 ata, 550° C	1,271	11,73	0,454	0,445
150 ata, 150° C	1,39	2,005	1,962	2,00	300 ata, 550° C	1,271	3,37	1,37	1,33
523 ata, 500° C	2,545	1,448	6,975	7,00	100 ata, 309,5° C	0,9	5,92	0,465	0,445

Zusammenfassung.

Die Einführung des kritischen Koeffizienten (k) in die Zustandsgleichung durch Hinzufügen einer vierten Konstanten (c) ergibt zwar einen besseren Verlauf der kritischen Isotherme und unterschiedliche Werte für $\lg \alpha$; die Übereinstimmung mit dem wirklichen Verlauf dieser Isotherme ist aber besonders für stark assoziierende Stoffe (mit hohem k -Wert), wie z. B. Wasser, noch immer unbefriedigend.

Unter der Annahme, daß die Steigerung von k über den Wert 3 hinaus nur durch die Assoziierung bedingt ist, wird nun mit Hilfe einer Zustandsgleichung (die für k den Wert 3 ergibt) der Versuch unternommen, auch die Veränderlichkeit des (physikalischen) Molekulargewichtes μ in Rechnung zu stellen.

Durch Auswahl einer bestimmten Abhängigkeit des μ von v gelingt es auf diese Weise (wenigstens für überkritische Volumina), die kritische Isotherme auch für H₂O erheblich besser als mit dem erstgenannten Verfahren wiederzugeben.

Schließlich wird in Abschnitt F eine den thermodynamischen Voraussetzungen nach Abschnitt B entsprechende (von der üblichen abweichende) Form der Temperaturabhängigkeit des Kohäsions- und Abstoßungsgliedes angegeben, die das Auftreten einer Boyle-Temperatur zur Folge hat.

Literatur:

¹ Über eine besondere Form der Zustandsgleichung. Akad. Wiss. Wien, Akad. Anz. Nr. 11 (1943). — ² Nach W. Schüle: Technische Thermodynamik, 2. Aufl., II. Bd., S. 80. Berlin: Springer-Verlag. 1914. — ³ Z. B. nach E. Schmidt: Einführung in die technische Thermodynamik, S. 136. Berlin: Springer-Verlag. 1936. — ⁴ H. Mache: Einführung in die Theorie der Wärme. Berlin: Walter de Gruyter. 1921. — ⁵ E. Justi: Spezifische Wärme, Enthalpie, Entropie. Dissoziation technischer Gase. Berlin: Springer-Verlag. 1938. — ⁶ H. Geiger u. K. Scheel: Handbuch der Physik. Berlin: Springer-Verlag. 1927. Bd. X.

(Eingegangen am 24. Dezember 1945.)

Über die Erhöhung der Zündfähigkeit des elektrischen Funkens durch örtliche Verbesserung des zu zündenden Gasgemisches.

Von H. Mache, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

Versuche nach einem an anderer Stelle bereits beschriebenen Verfahren haben ergeben, daß die Zündfähigkeit einer in einem strömenden, brennbaren Gasgemisch wirkenden Funkenstrecke durch Änderung der Elektrodenform, des Elektrodenmetalls, der Funkenzahl oder durch Ionisation des Gemisches nicht oder nur wenig geändert wird; daß hingegen eine Vermehrung der Funkenenergie durch Erhöhung der Spannung im Primärkreis oder der Kapazität und Selbstinduktion im Sekundärkreis das Zündvermögen des Funkens wesentlich steigert und daß vor allem in der Nähe des zündbarsten Gemisches eine wenn auch nur sehr kleine Erhöhung der Funkenlänge eine sehr bedeutende Erhöhung des Zündvermögens des Funkens bewirkt.

Desgleichen vermag eine Steigerung der Temperatur des Gasgemisches die Zündung sehr zu erleichtern.¹

In erster Linie erscheint aber doch die Zündfähigkeit des Funkens durch das Mischungsverhältnis zwischen brennbarem Gas und Luft bestimmt.

Für ein Propan-Luft-Gemisch deckt sich hierbei, wie l. c. gezeigt wurde, das zündbarste Gemisch mit dem stöchiometrischen. Ob das für alle brennbaren Gemische der Fall ist, wäre noch zu untersuchen und erscheint keineswegs selbstverständlich. Findet man doch bei allen brennbaren Gemischen die größte Verbrennungsgeschwindigkeit

nicht beim stöchiometrischen, sondern bei einem gasreicheren Verhältnis, so daß man auch das zündbarste Gemisch auf Seite des Brennstoffüberschusses suchen könnte. Aber auch auf Seite des Luftüberschusses ließe sich das Optimum der Zündbarkeit erwarten. So hat z. B. Falk² für Knallgas gezeigt, daß — allerdings bei thermischer Zündung durch adiabatische Kompression — sich Mischungen mit großem Sauerstoffüberschuß weit leichter entzünden als die stöchiometrische Mischung. Es ist also auch die Art der Zündung von Einfluß.

Immer aber zeigt es sich, daß schon kleinste Änderungen des Mischungsverhältnisses das Zündvermögen einer kaum ausreichenden Funkenstrecke stark zu erhöhen oder ganz aufzuheben vermögen. So gibt es kein wirksames Mittel zur Verbesserung der Funkenzündung in einem vom zündbarsten Verhältnis abweichenden Gemisch als ein Zusatz der im Mangel auftretenden Komponente, wobei immer die Herstellung des zündbarsten Gemisches als Optimum anzustreben sein wird.

Von dieser Erkenntnis wird sich möglicherweise auch ein praktischer Vorteil ziehen lassen, wenn man bedenkt, daß sich die Verbesserung des Mischungsverhältnisses durchaus nicht auf das ganze zu verbrennende Gemisch, ja vielleicht nicht einmal auf das ganze Funkenvolumen erstrecken muß. Es

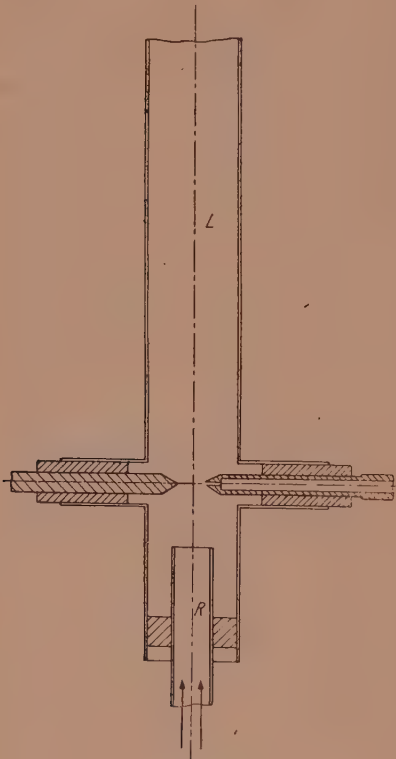


Abb. 1.

wird genügen, wenn man dafür sorgt, daß dort, wo der Funke springt und die Moleküle aktiviert werden, solches zündwilligeres Gemisch vorhanden ist; denn hat sich einmal auch nur an einer Stelle aus der elektrischen eine thermische Zündung entwickelt, so ist damit an dieser Stelle die höchstmögliche Konzentration aktivierter Moleküle erreicht und wird, falls es nur überhaupt brennbar ist, das ganze übrige Gemisch ebenfalls von der Zündung ergriffen werden.

Die zur Bestätigung dieses Gedankenganges unternommenen Versuche wurden mit der schon l. c. beschriebenen Anordnung durchgeführt; nur daß hier die eine der in das „Kreuzrohr“ (Abb. 1) eingeführten Elektroden massiv, die andere jedoch, aus einem Röhrrchen gleichen äußeren Durchmessers gefertigt, am Ende durch einen Kegel geschlossen war, dessen Spitze eine Durchbohrung von nur 0,3 mm besaß. Sie diente dazu, um Luft oder Gas in das durch die Funkenstrecke strömende Gemisch

¹ „Über das Mischungsverhältnis, bei dem ein Propan-Luft-Gemisch durch den elektrischen Funken am besten gezündet wird.“ S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIb (1946).

² Vgl. W. A. Bone und D. Townend: „Flame and Combustion in Gases“, S. 74ff. London. 1927.

einzuführen, so daß der Funke in seiner Bahn eine wenigstens in unmittelbarer Umgebung der durchbohrten Elektrode auch bei ganz geringer Zufuhr geänderte Mischung vorfindet.

Es wird nun ein Gemisch eingestellt, das wesentlich unter oder über dem optimalen Verhältnis liegt und die Funkenstrecke so weit verkürzt, daß nur mehr ein Teil der springenden Funken zündet. Zünden z von 100 Funken, so nennen wir z die (prozentuelle) „Entzündungszahl“.³ Läßt man dann aus der durchbohrten Elektrode

Tafel.

M.V.	Bemerkg.	K_L	Luft		Gas		K_G	Bemerkg.
%			nützt	schadet	nützt	schadet		
2,40		0,78					27	
2,48	zunehmende	0,66					100 0	nützt maximal
2,57	Verschlech- terung	0,56					45	Abnahme
2,88	↓	0,36			100 fach		15	der Verbes-
3,13	schadet maximal	0,20					6,6	serung
3,61		0,30					0,9	ohne Wirkung
3,74	ungefähr gleiche	0,42			schaden		0,59	zunehmende Ver-
3,83	Wirkung	0,30					0,32	schlechte- rung
- zündbarstes Mischungsverhältnis								
4,10		0,31			beide Zusätze		0,31	ungefähr gleichbl.
4,36	Abnahme der Verschlech- terung	0,75					0,30	Wirkung
4,70	↓ ohne Wirkung	0,86					0,15	
5,04		1,10					0,05	schadet maximal
5,14	zunehmende Verbesserung	1,05					0,10	
5,45		1,30					0,17	Abnahme
5,63	nützt	1,50					0,23	der
5,74	maximal ↓	1,50					0,53	Verschlech- terung
6,56	ohne	1,00					0,7	
6,76	Wirkung	1,00					0,74	↓

³ Eine schwache Lichterscheinung in Form einer bläulichgrau leuchtenden Spitze bildet sich über dem Funken immer, selbst dann, wenn das Gemisch jenseits der Zündgrenzen liegt oder, wenn innerhalb der Zündgrenzen die Funkenenergie zu einer vollen Entzündung nicht ausreicht. Die letztere ist nur dann eingetreten, wenn sich über dem Funken plötzlich ein hell leuchtender Pfropfen brennenden Gases bildet, der, ohne zu erlöschen, von der Strömung nach oben getragen wird. In der Nähe der Zündgrenzen sind diese Entzündungen fast lautlos und nur im verdunkelten Raum zu zählen; in der Nähe des stöchiometrischen Gemisches sind sie hell und erfolgen explosionsartig unter weithin hörbarem Geräusch.

Luft oder Gas austreten, so wird hierdurch in vom zündbarsten Verhältnis hinlänglich abweichenden Gemischen eine ganz wesentliche Verbesserung oder eine deutliche Verschlechterung der Zündung erreicht, je nachdem das Gemisch durch diese Zufuhr dem optimalen Mischungsverhältnis näher gebracht oder von ihm noch weiter entfernt wird. Um die Zündung zu verbessern, ist also bei gasreichen Gemischen Luft, bei gasarmen Gemischen Gas einzuführen, wobei aber in vielen Fällen auch schon Mengen von $\frac{1}{10}$ cm³/s genügen, um eine kräftige Wirkung auszulösen, so daß das zu zündende Gemisch, als Ganzes betrachtet, so gut wie nicht geändert wird. Nur in der Funkenbahn und unmittelbar darüber wird die Mischung verbessert bzw. verschlechtert.

Da die mit den zur Verfügung stehenden Gasometern (Kubizierapparaten) erreichbare Strömungsgeschwindigkeit 7 m/s nicht überstieg, konnte bei wasserstoffhaltigen Mischungen — besonders auf der Seite des Luftüberschusses — ein Rückschlagen der Flamme auf die Mündung des Brennerrohres *R* nicht verhindert werden. Es brennt dann dort ein laminarer oder turbulenter Flammenkegel und springen weiterhin die Funken durch das Verbrennungsprodukt. Dagegen konnte mit Propan-Luft der ganze Bereich, einschließlich des stöchiometrischen Gemisches aufgenommen werden.

In der angeschlossenen Tafel sind neben den Mischungsverhältnissen (in Volumprozenten) die Wirkungen eines kleinen, stets gleichen Luftzusatzes (links) und eines ebensolchen Gaszusatzes (rechts) sowohl in Worten als auch quantitativ auf die folgenden zweierlei Arten verzeichnet: Erstens zahlenmäßig durch Angabe der Faktoren K_L und K_G , um welche die Zündungszahlen durch den betreffenden Zusatz verändert werden. Es bedeutet also $K > 1$ Verbesserung, $K < 1$ Verschlechterung der Zündung. Zweitens durch die in der Mitte der Tafel eingetragenen Stufenlinien, welche diese Ergebnisse graphisch darstellen. Die ganze Streifenbreite entspricht nach rechts dem Ausbleiben jeder Zündung, nach links auf der Gasseite (also bei Luftzusatz) der doppelten, auf der Luftseite (also bei Gaszusatz) der hundertfachen Entzündungszahl.

Hiernach wirkt in der Umgebung des zündbarsten, 4%igen Propan-Luft-Gemisches sowohl Luft- wie Gaszusatz auf die Zündung verschlechternd ein, weil durch beides das stöchiometrische Mischungsverhältnis verderben wird. Erst in einiger Entfernung von der zündbarsten Mischung tritt die beschriebene Wirkung auf und steigert sich auf der Gasseite bis zum 5·7%igen Gemisch und auf der Luftseite bis zum 2·5%igen Gemisch. Hierbei erscheint (besonders auf der Luftseite) die durch die Zufuhr der im Mangel auftretenden Komponente erzielte Verbesserung weit stärker als die Verschlechterung, welche durch die Zufuhr der im Überschuß vorhandenen Komponente bewirkt wird. Jenseits der Maxima sinkt dann die Wirkung wieder ab.

Die gleichen Versuche wurden auch mit Stadtgas-Luft-Gemischen durchgeführt. Das verwendete städtische „Permagas“ hatte hierbei im Mittel die unten gegebene Zusammensetzung,⁴ so daß das stöchiometrische Verhältnis bei 22·1% lag. Da bei der erreichbaren Strömungsgeschwindigkeit die Flamme zwischen 13,3 und 23,3% Gasgehalt auf das Brennerrohr zurückschlug, konnten die Beobachtungen in diesem Bereich nicht ausgeführt werden. Es ist aber zu erwarten, daß, wie oben, sich auch hier sowohl bei Zufuhr von Luft wie von Gas zunächst eine Verschlechterung der

⁴ Kohlendioxyd	2·4%	Kohlenoxyd	12·8%
Schwere Kohlenwasserstoffe	2·4%	Wasserstoff	43·0%
Sauerstoff	0·4%	Methan	19·6%
		Stickstoff	19·4%
Oberer Heizwert	4140 kcal/m ³		
Dichte	0·520		

Die schweren Kohlenwasserstoffe wurden bei der Berechnung als aus 90% C₂H₄ und aus 10% C₆H₆ bestehend angenommen.

Zündbarkeit gezeigt hätte. Wieder tritt die beschriebene Wirkung erst in einiger Entfernung vom Mischungsverhältnis höchster Entzündlichkeit auf und steigert sich auf der Gasseite bis zum 28%igen, auf der Luftseite bis zum 8%igen Gemisch.

Es sei noch angemerkt, daß es keinen Unterschied macht, ob die durchbohrte Elektrode als Anode oder Kathode verwendet wird.

Statt den Luft- oder Gaszusatz in die Bahn des Funkens mittels einer durchbohrten Elektrode einzuführen, wurde in einigen Versuchen diese Zufuhr durch ein 1·5 mm weites Röhrchen vorgenommen, das, wie Abb. 2 zeigt, in der Achse des Brennerrohres emporragte und einige Millimeter unter der Funkenstrecke endigte. Auch so kann man Luft, Gas oder ein fremdes Gemisch in die Funkenbahn bringen. Doch trat die in erster Linie interessierende Erleichterung der Zündung in allen Fällen an der durchbohrten Elektrode besser in Erscheinung.

Aus diesen Versuchen können wir zu der Frage, wie man die Zündfähigkeit des elektrischen Funkens in brennbaren Gasgemischen zu steigern vermag, folgendes bemerken:

1. Wird man das Gemisch im zündbarsten Verhältnis herstellen oder durch Zufuhr der im Mangel vorhandenen Komponente aus einer Leitung (durchbohrter Elektrode) dafür zu sorgen haben, daß wenigstens dort, wo der Funke springt, zündbarstes Gemisch vorhanden ist. Erscheint eine größere Zufuhr nötig, so wird man aus der Leitung gleich ein entzündlichstes Gemisch in die Funkenstrecke blasen, wobei das hierzu verwendete brennbare Gas auch ein anderes sein kann, als das im zu zündenden Gemisch vorhandene. Bei Verwendung eines Gases, das mit Luft (oder Sauerstoff) höchst temperierte Flammen gibt (Azetylen, Wasserstoff), wird die Zündung im übrigen Gemisch um so leichter erfolgen.

2. Eine weitere wesentliche Verbesserung der Zündbarkeit eines Gasgemisches läßt sich durch Erhöhung seiner Temperatur erreichen. Aber auch hier wird schon ein Teil dieser Wirkung zu erzielen sein, wenn man nicht das ganze Gemisch, sondern nur die zusätzlich in die Funkenstrecke eingeführte Komponente oder das dort eingeblasene Gemisch auf höhere Temperatur bringt, was durch Heizung der durchbohrten Elektrode oder der sonst hierbei verwendeten Leitung leicht möglich ist.

3. Wird man nach Verbesserung der Zündbarkeit des in der Funkenbahn vorhandenen Gemisches durch die im vorhergehenden beschriebenen Maßnahmen die Zündfähigkeit der Funkenstrecke durch geringe Erhöhung der Funkenlänge soweit steigern, daß jeder Funke zündet. Es wird dann die Zündmaschine die beabsichtigte Wirkung mit einem Minimum von Energie erzielen.

(Eingegangen am 31. August 1946.)

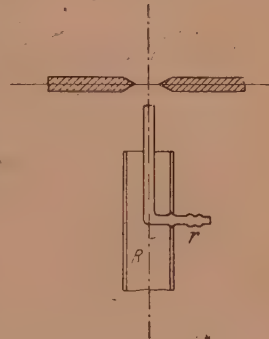


Abb. 2.

Höhere Radlinien.

Von W. Wunderlich, Wien.

Mit 12 Textabbildungen.

1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer Erweiterung des Begriffes der Radlinien. Unter dieser Bezeichnung versteht man im allgemeinen jene ebenen Kurven, die als Punktbahnen beim Rollen eines Kreises auf einem anderen entstehen. Man unterscheidet dabei die Zykloiden, bei welchen der erzeugende Punkt auf dem Umfang des Rollkreises liegt, und die Trochoiden, bei welchen das nicht der

Fall ist. Im Bedarfsfall wird noch durch die Vorsilben „Epi-“ bzw. „Hypo-“ angedeutet, ob der bewegliche Kreis auf der Außen- bzw. Innenseite des Fixkreises abrollt. — Diese „niederen“ Radlinien sind seit langem bekannt, da sie in Geometrie und Mechanik bei den verschiedensten Gelegenheiten auftreten. Sie waren Gegenstand zahlloser, meist kleinerer Untersuchungen, welche eine Fülle schöner Eigenschaften aufdeckten; eine befriedigende Monographie existiert aber eigentlich noch immer nicht.¹

Unter den besonderen Eigenschaften der niederen Radlinien ist besonders ihre doppelte Erzeugung hervorzuheben, die schon Euler (1784) gekannt hat: Jede Radlinie kann auf zweifache Art als Punktbahn einer Kreisrollung entstehen.²

Die Zykloiden nehmen insofern eine besondere Stellung unter den Radlinien ein, als sie noch eine weitere Erzeugung als Hüllkurve gestatten: Jeder Durchmesser des Rollkreises hüllt nämlich im Verlauf der Bewegung eine Zykloide ein, und auch diese Erzeugung ist wieder auf doppelte Weise möglich.³

Aus ihrer besonderen Entstehungsweise fließen weitere bemerkenswerte Eigenschaften der Zykloiden, die den Trochoiden fehlen. So sind z. B. ihre Evoluten zur Grundkurve ähnlich, woraus sich natürlich auch Aussagen über die Evolventen ergeben. Die isoptischen Linien der Zykloiden sind Trochoiden, ebenso die Fußpunktskurven bezüglich des Mittelpunktes; letztere gehen übrigens selbst durch das Zentrum und tragen einen eigenen Namen: Es sind die Rosenkurven oder Rhodoneen von Grandi (1713).

Die angekündigte Erweiterung des Radlinienbegriffes besteht nun darin, daß nicht bloß zwei, sondern eine endliche Anzahl s von Rädern rollen. Es liegt ein erster Kreis vor, der fest ist und auf dem ein zweiter rollt; auf diesem rollt dann ein dritter, auf diesem wiederum ein vierter usw. Wesentlich ist, daß alle Geschwindigkeiten zwar beliebig, aber konstant sein sollen. Ein mit dem letzten — dem s^{ten} — Kreis starr verbundener Punkt beschreibt eine Bahn, die „Radlinie s^{ter} Stufe“ heißen soll. Man gelangt auf diese Weise zu einer großen, außerordentlich formenreichen Familie von Kurven, die durch eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften ausgezeichnet sind und auf Grund ihrer mechanischen Erzeugung technisches Interesse verdienen.

An sich ist dieser schon in den Epizykeln des Ptolemäus (2. Jahrh. n. Chr.) verwirklichte Gedanke gewiß nicht neu, doch scheint eine systematische Untersuchung dieser Kurven bisher zu fehlen, da sie nirgends besonders erwähnt, geschweige denn gewürdigt werden.⁴ Und doch ist das eingehende Studium der „höheren Radlinien“ lohnend, denn es lassen sich nicht nur die vorhin angeführten Sätze über die gewöhnlichen Radlinien („2. Stufe“) weitgehend verallgemeinern, sondern erst jetzt Aussagen über die allgemeinen Fußpunktskurven der Zykloiden und die isoptischen Linien beliebiger Zykloidenpaare machen. Ferner läßt sich eine große Zahl bekannter Einzel-

¹ Zusammenfassende Darstellungen der niederen Radlinien geben G. Loria: *Spezielle algebraische und transzendente Kurven der Ebene*, Bd. II. Leipzig. 1902. — H. Wieleitner: *Spezielle Ebene Kurven*. Sammlung Schubert 56. Leipzig. 1908. — Ausführliche Literaturangaben enthalten die Referate von G. Scheffers: *Enz. math. Wiss.* III D 4 und E. Wölffing: *Bibl. math.* (3) 2 (1901).

² So entsteht z. B. die bekannte dreispitzige Hypozykloide von Steiner als Punktbahn nicht nur bei der Rollung eines Kreises vom Radius 1 in einem Kreis vom Radius 3, sondern auch bei der Rollung eines doppelt so großen im selben Grundkreis.

³ Die vorhin erwähnte Steinerzykloide entsteht als Durchmesserhüllbahn sowohl bei der Rollung eines Kreises vom Radius 2 in einem Kreis vom Radius 3, als auch bei der Rollung eines doppelt so großen um denselben Grundkreis.

⁴ Die vielleicht einigermaßen einschlägigen Arbeiten von G. Beller mann, *Über Rouletten*, welche entstehen, wenn eine Zykloide auf einer anderen rollt (Berlin, 1892), und C. Eichler, *Mitt. Hamb. math. Ges.* 2 (1890) sind gegenwärtig nicht greifbar.

kurven und Kurvengruppen unter die höheren Radlinien einordnen, womit sie einer einheitlichen Behandlung zugänglich gemacht und neue Zusammenhänge aufgedeckt werden.

Die Möglichkeit, beliebig vorgegebene Linien durch höhere Radlinien mit jeder gewünschten Genauigkeit anzunähern, unterstreicht ihre Bedeutung für die Technik.

Die vorliegende Arbeit ist den allgemeinen Eigenschaften der höheren Radlinien gewidmet. Einzelheiten, Sonderfälle und Anwendungen sollen späteren Mitteilungen vorbehalten bleiben.

2. Grundlegendes.

Um einen Punkt A_0 der festen Ebene Σ_0 drehe sich eine Ebene Σ_1 mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_1 . Um einen Punkt A_1 von Σ_1 drehe sich eine weitere Ebene Σ_2 mit der Geschwindigkeit ω_2 usw. bis zur Ebene Σ_s , die sich mit der Geschwindigkeit ω_s um einen festen Punkt A_{s-1} von Σ_{s-1} dreht. Die Bewegung von Σ_s gegen Σ_0 mag in naheliegender Weise und in Anlehnung an den im Maschinenbau beim sog. „Planetengetriebe“ verwirklichten Sonderfall $s = 2$ als „Planetenbewegung s^{ter} Stufe“ bezeichnet werden. Voraussetzung ist dabei, daß alle Geschwindigkeiten verschieden sind.

Zur mathematischen Beschreibung der Bewegung nehmen wir in Σ_0 ein ruhendes Normalkoordinatensystem

x, y mit dem Ursprung in A_0 an; entsprechend in der bewegten Ebene Σ_s ein mit dieser verbundenes Achsenkreuz ξ, η mit dem Ursprung A_{s-1} (Abb. 1). Da wir uns vorläufig auf reelle Punkte beschränken, können wir jedes Koordinatenpaar zu einer komplexen Zahl zusammenfassen:

$$z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (i^2 = -1). \quad (1)$$

Durch diese Maßnahme wird eine bequeme Darstellung jeder Drehung und damit jeder Bewegung möglich.

Dreht sich nämlich der durch eine komplexe Zahl a gegebene Vektor um den Winkel α , dann wird seine neue Lage einfach durch $a' = a \cdot e^{i\alpha}$ dargestellt.⁵

Die Anfangslage der Drehpunkte A_v kann mithin durch die von Null verschiedenen komplexen Konstanten $a_1, a_2 \dots a_{s-1}$ gegeben werden, die den Vektoren $A_0 A_1, A_1 A_2 \dots A_{s-2} A_{s-1}$ entsprechen. Ist schließlich t die Zeit, dann sind $\omega_v t$ die Drehwinkel der Vektoren a_v und der mit ihnen verbundenen Ebenen Σ_v , und die Bewegung von Σ_s wird beschrieben durch die Gleichung

$$z = a_1 \cdot e^{i\omega_1 t} + a_2 \cdot e^{i\omega_2 t} + \dots + a_{s-1} \cdot e^{i\omega_{s-1} t} + \zeta \cdot e^{i\omega_s t}, \quad (2)$$

die die Lage eines beliebigen Punktes ζ von Σ_s für jeden Augenblick t in dem ruhenden System Σ_0 angibt. Vorausgesetzt ist, daß die Koordinatensysteme z und ζ in der Ausgangsstellung $t = 0$ zueinander parallel liegen. Unter Einführung des Drehwinkels $\varphi = \omega_s t$ und der Übersetzungen $m_v = \omega_v / \omega_s$ haben wir

$$z = \zeta \cdot e^{i\varphi} + \sum_{v=1}^{s-1} a_v e^{im_v \varphi}. \quad (3)$$

⁵ Dies ist eine Folge der Eulerschen Beziehung $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Sind nämlich r, φ die Polarkoordinaten des Vektors a , dann ist $a = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$, und für den gedrehten Vektor $r, \varphi + \alpha$ gilt entsprechend $a' = r e^{i(\varphi + \alpha)} = r e^{i\varphi} \cdot e^{i\alpha} = a \cdot e^{i\alpha}$.

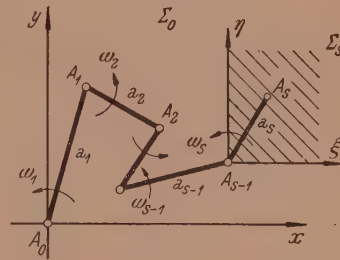


Abb. 1.

Auflösung nach ζ ergibt die Darstellung der umgekehrten (inversen) Bewegung

$$\zeta = z \cdot e^{-i\varphi} - \sum_{v=1}^{s-1} a_v e^{i m'_v \varphi} \quad (m'_v = m_v - 1), \quad (4)$$

die natürlich auch eine Planetenbewegung, aber mit anderen Geschwindigkeitsverhältnissen ist.

3. Erzeugung der Radlinien.

Erteilen wir ζ einen festen Wert $a_s \neq 0$, dann stellt (2) eine Bahnkurve unserer Bewegung dar. Ihre komplexe Gleichung lautet in knapper Form

$$z = \sum_{v=1}^s a_v e^{i \omega_v t}. \quad (5)$$

Wir nennen sie eine „Radlinie s^{ter} Stufe“ und kennzeichnen sie im Bedarfsfall näher durch Angabe der Geschwindigkeitsverhältnisse $\omega_1 : \omega_2 : \dots : \omega_s$; dieses Verhältnissystem soll die Sippencharakteristik der Radlinie heißen. Der Kürze zuliebe sprechen wir gelegentlich auch schlechtweg von einer „Radlinie $\omega_1 : \dots : \omega_s$ “.

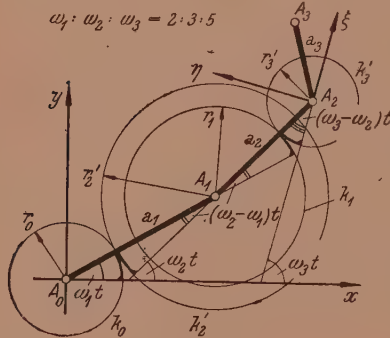


Abb. 2.

In der Ebene Σ_0 ist ein festes Zahnrad mit dem Wälzkreis $k_0 (A_0, r_0)$ angebracht, das mit einem Rad $k_2' (A_1, r_2')$ der Ebene Σ_2 kämmt; die beiden Radien sind durch die Forderungen

$$r_0 : r_2' = (\omega_2 - \omega_1) : \omega_1, \quad r_0 + r_2' = |a_1|$$

bestimmt. Ein mit k_2' konzentrisches Rad $k_1 (A_1, r_1)$ ist mit Σ_1 fest verbunden und arbeitet mit einem Zahnrad $k_3' (A_2, r_3')$ zusammen; die Halbmesser sind durch

$$r_1 : r_3' = (\omega_3 - \omega_2) : (\omega_2 - \omega_1), \quad r_1 + r_3' = |a_2|$$

festgelegt. Wird nun a_1 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um A_0 herumgeführt, dann erhalten tatsächlich a_2 und a_3 die verlangten Geschwindigkeiten ω_2 und ω_3 .

Auf diese Weise lässt sich jede höhere Planetenbewegung erzeugen. Allgemein gelten dabei für die Wälzkreisradien der beiden zusammenarbeitenden, an den Enden des Gliedes a_v drehbar gelagerten und mit den Nachbargliedern starr verbundenen Räder die Beziehungen

$$r_{v-1} : r'_{v+1} = (\omega_{v+1} - \omega_v) : (\omega_v - \omega_{v-1}), \quad r_{v-1} + r'_{v+1} = |a_v| \quad (6)$$

$$(v = 1, 2, \dots, s-1; \quad \omega_0 = 0).$$

Für die technische Verwirklichung einer Planetenbewegung s^{ter} Stufe sind mithin $2(s-1)$ Zahnräder erforderlich. Hohlräder ($r < 0$) lassen sich durch Einschaltung eines Ritzels immer vermeiden. Unter Umständen ist es zweckmäßig, ein Mittelglied a_k festzuhalten und dafür das System Σ_0 beweglich zu gestalten; Σ_0 (Werkstisch!) führt

dann gegenüber Σ_k eine Planetenbewegung k^{ter} Stufe, Σ_s (Werkzeug!) eine solche $s - k^{\text{ter}}$ Stufe aus.

Vertauschen wir zwei oder mehrere Glieder des Gelenkpolygons unter Erhaltung von Richtung und Drehgeschwindigkeit (Umordnung der Vektorsumme!), so ist das auf die Bahn des Endpunktes ohne Einfluß, doch ändern sich gemäß (6) die Übersetzungen und Abmessungen der Zahnräder. Wir erkennen damit:

Satz 1. Jede Radlinie s^{ter} Stufe kann auf $s!$ verschiedene Arten durch ein zwangsläufig bewegliches s -gliedriges Gelenkpolygon erzeugt werden.

Eine andere Erzeugungsweise einer höheren Radlinie mit Hilfe eines Gelenkmechanismus von s^2 Gliedern veranschaulicht Abb. 3 für den Fall $s = 4$: Wir gehen wieder aus von dem Gelenkpolygon $A_0 A_1 \dots A_s$ und lassen das erste Glied a_1 auf Null zusammenschrumpfen, hierauf in dem Restpolygon das Glied a_2 usw. Die bei den Schrumpfungsprozessen von den Gelenken durchlaufenen Wegstrecken a_1, a_2 usw. werden ebenfalls als Stäbe ausgebildet, womit wir zu einem Getriebe gelangen, das jeden der s Vektoren a_v genau s -mal als Stab enthält. Treiben wir schließlich die in A_0 zusammenstoßenden Glieder a_v mit den entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten ω_v an, so beschreibt das Ausgangspolygon zwangsläufig die vorgeschriebene Bewegung und A_s die gewünschte Radlinie s^{ter} Stufe. — Dieser Mechanismus stellt eine Verallgemeinerung des von Beller mann⁶ der Entstehung von niederen Radlinien zugrunde gelegten Gelenkparallelogramms dar.

Durch Vertauschung von Gliedern des Ausgangspolygons gelangen wir zu anderen Stabanordnungen.

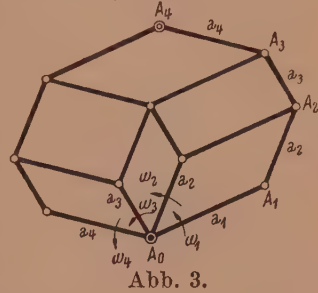


Abb. 3.

4. Polbahnen.

Jede ebene Bewegung läßt sich bekanntlich auf das gleitungslose Rollen zweier bestimmter Kurven, der sog. Polbahnen, zurückführen.

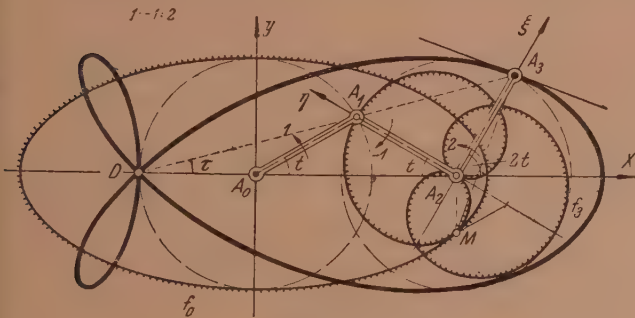


Abb. 4.

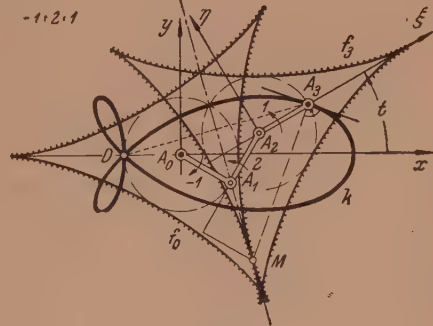


Abb. 5.

Zur Ermittlung der Polbahnen der Planetenbewegung von Σ_s gegen Σ_0 bedienen wir uns wieder der Darstellung (3). Wir fragen nach dem Momentanpol M zur Zeit t , d. h. nach jenem Punkt ζ , der bei der infinitesimalen Bewegung während des Zeitelementes dt in Ruhe bleibt, für welchen also die Geschwindigkeit

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \omega_s \frac{dz}{d\varphi} = \omega_s i \left(\zeta e^{i\varphi} + \sum_{m=1}^{s-1} a_m e^{im\varphi} \right)$$

⁶ G. Beller mann: Epicykloiden und Hypocykloiden. Dissertation Jena. 1867.
Ingenieur-Archiv I, 4-5.

- 1:2:1. Die Polbahnen sind zwei kongruente Steinerzykloiden (Hypozykloiden —1:2)
 $z^* = 2e^{-it} - e^{2it}$ und $\zeta^* = e^{-2it} - 2e^{it}$, die stets spiegelbildlich zu ihrer Wälz-
 tangente liegen, was unmittelbar auf die übliche Definition des Dreiblattes als
 Fußpunktskurve einer Steinerzykloide führt (vgl. Abschn. 9).
- 2:1:—1. Auf einer Pascalschnecke $z^* = 3e^{2it} + 2e^{it}$ (Epitrochoide 1:2) rollt eine
 Epitrochoide 2:3 ($\zeta^* = 2e^{3it} + e^{2it}$).

5. Algebraische Radlinien.

Bei der Erzeugung der Radlinien durch Zahnradgetriebe sind alle Geschwindigkeits-
 verhältnisse notwendig rational; die Geschwindigkeiten ω_v selbst dürfen wir unter
 diesen Umständen als ganze und teilerfremde Zahlen voraussetzen. Der Zeit-
 parameter t kann sodann auf ein Intervall von der Länge 2π beschränkt werden,
 denn die Funktion $z(t)$ besitzt diese Periode. Die Radlinien sind in diesem Fall ge-
 schlossen und algebraisch.

Zur Feststellung der algebraischen Charaktere einer solchen Radliniensippe fassen
 wir den Übergang (1) von den Koordinaten x, y zur komplexen Größe z durch Hinzunahme
 der konjugiert-komplexen Größe $\bar{z} = x - iy$ als (lineare) Koordinaten-
 transformation $x, y \rightarrow z, \bar{z}$ auf. Diese sog. „Minimalkoordinaten“ haben sich viel-
 fach bewährt, speziell auch in der ebenen Kinematik, finden aber noch immer nicht
 die gebührende Beachtung.⁷ — Es sei erwähnt, daß wir jetzt auch die komplexen
 Punkte der Ebene beherrschen, wenn wir für z und \bar{z} auch nichtkonjugierte Zahlen-
 paare zulassen.

Nach Einführung des algebraischen Parameters $u = e^{it}$ ($\bar{u} = 1/u$) lautet die nun
 durchaus rationale Parameterdarstellung der Radlinie (5) in Minimalkoordinaten

$$z = \sum_{v=1}^s a_v u^{\omega_v}, \quad \bar{z} = \sum_{v=1}^s \bar{a}_v u^{-\omega_v}. \quad (10)$$

Algebraische Radlinien sind mithin rational (vom Geschlecht Null).

Zur Ermittlung der Ordnung N haben wir die Schnittpunkte mit einer allge-
 meinen Geraden abzuzählen. Da letztere durch eine lineare Gleichung in z und \bar{z}
 dargestellt wird, gelangen wir nach Einsetzung der Ausdrücke (10) zu einer algebraischen
 Gleichung in u , deren Grad wegen $a_v \neq 0$ durch

$$N = 2 \max |\omega_v| \quad (11)$$

gegeben ist.

Zur Bestimmung der Klasse M sind die durch einen allgemeinen Punkt (p, \bar{p})
 der Ebene laufenden Tangenten der Radlinie abzuzählen. Die Bedingung hierfür lautet

$$(p - z) : (\bar{p} - \bar{z}) = \dot{z} : \dot{\bar{z}} \quad \text{oder} \quad \bar{p} \dot{z} - p \dot{\bar{z}} = \bar{z} \dot{z} - z \dot{\bar{z}},$$

was nach Einführung von (10) auf

$$\sum_{v=1}^s \omega_v (p a_v u^{\omega_v} + \bar{p} \bar{a}_v u^{-\omega_v}) = \sum_{\mu=1}^s \sum_{v=1}^s a_\mu \bar{a}_v (\omega_\mu + \omega_v) u^{\omega_\mu - \omega_v} \quad (12)$$

führt. Im allgemeinen stimmt die gesuchte Klasse mit dem Grad dieser Gleichung
 überein:

$$M = 2 \max_{\omega_\mu + \omega_v \neq 0} (|\omega_v|, |\omega_\mu - \omega_v|). \quad (13)$$

⁷ Zur Untersuchung der niederen Radlinien wurden Minimalkoordinaten bzw. die komplexe
 Zahlenebene herangezogen von F. Morley, Amer. J. Math. 16 (1894) und F. Schilling, Z.
 Math. Physik 44 (1899), zum Studium der ebenen Bewegung von R. Mehmke, Z. Math. Physik 35
 (1890) und in neuerer Zeit von E. Hackmüller, Z. angew. Math. Mech. 18 (1938), insbesondere
 für die Koppelkurve von A. Haarbleicher, J. éc. pol. II 31 (1933).

Jene Paare ω_μ, ω_ν , deren Summe verschwindet, sind auszuschließen, da ihr Beitrag auf der rechten Seite von (12) wegfällt.

Es kann vorkommen, daß für einen bestimmten Parameterwert u_0 sowohl \dot{z} als auch \ddot{z} verschwindet, nämlich dann, wenn ein Rückkehrpunkt vorliegt. Gl. (12) gestattet dann die Abspaltung des Wurzelfaktors $u - u_0$ und die Klasse erniedrigt sich um 1.

Satz 4. Eine algebraische Radlinie der Sippe $\omega_1 : \dots : \omega_s$ (ω_ν ganz und teilerfremd⁸) hat die Ordnung $N = 2 \max |\omega_\nu|$ und im allgemeinen die Klasse $M = 2 \max (|\omega_\nu|, |\omega_\mu - \omega_\nu|)$. Bei der Bestimmung der Klasse sind gegengleiche Paare ω_μ, ω_ν auszuschalten, ferner für jede auftretende endliche Spitze 1 in Abzug zu bringen.

Zur Klärung der Verhältnisse im Unendlichen wird man mittels

$$z = Z_1/Z_0, \quad \bar{z} = Z_2/Z_0 \quad \text{und} \quad u = u_1/u_0 \quad (14)$$

homogene Koordinaten und Parameter einführen. Durch Umnumerierung der Winkelgeschwindigkeiten und allfälligen Vorzeichenwechsel können wir erreichen, daß ω_1 den größten vorhandenen Betrag hat (zumindest von keinem anderen Betrag übertroffen wird) und positiv ist. Dann sind in der aus (10) fließenden Darstellung der Radlinie

$$Z_0 : Z_1 : Z_2 = u_1^{\omega_1} u_0^{\omega_1} : \sum_{\nu=1}^s a_\nu u_1^{\omega_1 + \omega_\nu} u_0^{\omega_1 - \omega_\nu} : \sum_{\nu=1}^s \bar{a}_\nu u_1^{\omega_1 - \omega_\nu} u_0^{\omega_1 + \omega_\nu} \quad (15)$$

keine negativen Exponenten vorhanden. Die Ordnung ist $N = 2 \omega_1$.

Der Schnitt mit der Ferngeraden $Z_0 = 0$ verteilt sich auf die beiden Punkte $u_1 = 0$ und $u_0 = 0$, je ω_1 -fach gezählt. Die Lage dieser Punkte hängt aber noch vom Wert der kleinsten Winkelgeschwindigkeit ab, die mit ω_2 bezeichnet sei. Wir haben zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem ob $\omega_1 + \omega_2$ von Null verschieden ist oder nicht.

I. $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$. „Zirkuläre Radlinien“.

Dem Wert $u_1 = 0$ entspricht der Kreispunkt $0 : 0 : 1$; die durch die niedrigsten Potenzen von u_1 in (15) bestimmte Näherung daselbst lautet

$$Z_0 : Z_1 : Z_2 = u^{\omega_1} : a_2 u^{\omega_1 + \omega_2} : \bar{a}_1. \quad (16)$$

Wir haben daher nach dem Vorzeichen von ω_2 zu unterteilen:

I a. $\omega_2 > 0$. Die absoluten Kreispunkte sind ω_1 -fache Punkte der Radlinie; die Tangenten fallen in den Minimalgeraden $x \pm i y = 0$ zusammen. — Für $s = 2$ erhält man die Epitrochoiden, so daß man allgemein von „Außenradlinien“ sprechen könnte.

I b. $\omega_2 < 0$. Die absoluten Kreispunkte sind $(\omega_1 + \omega_2)$ -fache Punkte der Radlinie mit der Ferngeraden als gemeinsamer Tangente. — Für $s = 2$ erhält man die Hypotrochoiden, so daß man allgemein von „Innenradlinien“ sprechen könnte.

II. $\omega_1 + \omega_2 = 0$. Die Radlinien sind nicht zirkular, sondern gehen wegen (16) durch die Fernpunkte $0 : a_2 : \bar{a}_1$ und $0 : a_1 : \bar{a}_2$. Dieselben fallen zusammen, wenn die Determinante $\Delta = a_1 \bar{a}_1 - a_2 \bar{a}_2$ verschwindet.

II a. $\Delta \neq 0$. „Elliptische Radlinien“. Die Fernpunkte sind konjugiert-komplex und lassen sich durch die lineare Transformation $\zeta = \bar{a}_1 z - a_2 \bar{z}$ in die absoluten Kreispunkte überführen. Die elliptischen Radlinien sind daher affin zu den zirkularen.

II b. $\Delta = 0$. „Parabolische Radlinien“. Die Fernpunkte fallen in der Richtung des Vektors $z = a_1 + a_2$ zusammen. Dieser Punkt ist im allgemeinen eine isolierte Singularität mit in der Ferngeraden zusammenfallenden Tangenten; in Ausnahmefällen können sich aber auch reelle parasitische Kurvenzweige dorthin erstrecken.

⁸ Enthalten die ω_ν den größten gemeinsamen Teiler q , dann ist die Radlinie q -fach überdeckt.

Anwendung auf das Beispiel des geraden Dreiblattes (9) kennzeichnet dasselbe als zirkulare (Innen-) Radlinie 4. Ordnung und 6. Klasse, die die Ferngerade als Doppeltangente besitzt.

Die folgenden, leicht einzusehenden Sätze betreffen Fragen der Symmetrie:

Satz 5. Sind in der komplexen Gleichung (5) einer Radlinie alle a_v reell (rein imaginär), dann ist die Kurve symmetrisch zur reellen (imaginären) Zahlenachse.

Satz 6. Eine Radlinie weist dann und nur dann eine q -zählige Drehsymmetrie auf, wenn die teilerfremden ω , einer arithmetischen Reihe mit der Differenz q entnommen sind.

Hieraus geht u. a. hervor, daß alle Trochoiden $\omega_1 : \omega_2$ eine $|\omega_1 - \omega_2|$ -zählige Symmetrie besitzen.

6. Hüllbahnen von Geraden.

Nach weitgehender Klärung der bei einer Planetenbewegung entstehenden Punktbahnen wollen wir jetzt die Hüllkurven von mitgenommenen Geraden untersuchen.

Wir denken uns also mit der bewegten Ebene Σ_s eine Gerade g starr verbunden (Abb. 7). Sie sei in dem der Ebene aufgeprägten ζ -System durch einen Richtungsvektor A von Einheitsbetrag ($A = e^{i\alpha}$) und durch den orientierten Ursprungsabstand p festgelegt; p werde dann positiv gezählt, wenn die im Sinn von A gerichtete Gerade im positiven Sinn um den Nullpunkt A_{s-1} dreht. Nun wird g mittels eines reellen Längenparameters $\lambda = \bar{\lambda}$ dargestellt durch $\zeta = -A + A\lambda$. Hinzunahme der konjugierten Beziehung und Elimination von λ führt bei Beachtung von $A\bar{A} = 1$ auf die Gleichung in Minimalkoordinaten

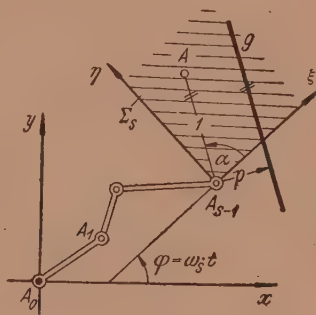


Abb. 7.

$$\bar{A} \zeta - A \bar{\zeta} + 2 p i = 0. \quad (17)$$

Die Gleichung im festen z -System entsteht daraus durch Einsetzen von (4):

$$\bar{A} z \cdot e^{-i\varphi} - A z \cdot e^{i\varphi} = -2p i + \sum_{v=1}^{s-1} (\bar{A} a_v e^{i m_v' \varphi} - A \bar{a}_v e^{-i m_v' \varphi}). \quad (18)$$

Zwecks Ermittlung der Hüllkurve ist (18) nach φ zu differenzieren:

$$\bar{A} z \cdot e^{-i\varphi} + A \bar{z} \cdot e^{i\varphi} = - \sum_{\nu=1}^{s-1} (\bar{A} a_{\nu} m_{\nu}' e^{i m_{\nu}' \varphi} + A \bar{a}_{\nu} m_{\nu}' e^{-i m_{\nu}' \varphi}). \quad (19)$$

Damit haben wir die Gleichung einer Geraden \dot{g} , die g im Berührungspunkt mit der gesuchten Hüllkurve l schneidet; da ihre Richtung zu g senkrecht ist, ist \dot{g} die Normale von l .

Rechnen wir z aus dem Gleichungspaar (18), (19) aus (Addition!), so erhalten wir unmittelbar die komplexe Darstellung der Hüllkurve

$$z = -A p i \cdot e^{i\varphi} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{s-1} (a_{\nu} m_{\nu}'' e^{i m_{\nu} \varphi} + A^2 \bar{a}_{\nu} m_{\nu} e^{-i m_{\nu}' \varphi}); \quad (20)$$

hierin ist abkürzend $m_v'' = m_v' - 1 = m_v - 2$ gesetzt.

Aus der Bauart der Gleichung ersehen wir, daß es sich wieder um eine Radlinie handelt. Sie ist im allgemeinen — d. h. wenn alle Exponenten verschieden sind und keiner verschwindet — von $2s-1^{\text{ter}}$ Stufe und gehört der Sippe $\omega_1 : \dots : \omega_{s-1} : \omega_s : (2\omega_s - \omega_1) : \dots : (2\omega_s - \omega_{s-1})$ an. Denken wir uns die ω_v auf einer Zahlengeraden markiert, so besteht die Sippencharakteristik der Hüllkurve aus jener der erzeugenden Planetenbewegung, vermehrt um das Spiegelbild an ω_s . Wegen $\omega_s \neq 0$

haben die größte und die kleinste Winkelgeschwindigkeit verschiedene Beträge und die Radlinie ist stets zirkular.

Die anschauliche Übersicht läßt uns auch gewisse Fälle von Stufenreduktionen erkennen. Ist etwa ein Paar ω_μ, ω_ν von vornherein symmetrisch zu ω_s , dann erzeugt es bei der Spiegelung kein neues und die Stufe fällt um 2 niedriger aus. Die zugehörigen Glieder in der Gl. (20) lassen sich zusammenziehen zu

$$\frac{1}{2} m_\nu (a_\mu - A^2 \bar{a}_\nu) e^{i m_\mu \varphi} + \frac{1}{2} m_\mu (a_\nu - A^2 \bar{a}_\mu) e^{i m_\nu \varphi}. \quad (21)$$

Da die beiden Klammern bis auf einen Faktor konjugiert sind, können sie nur gleichzeitig verschwinden; dies ist in der Tat für gewisse Richtungen möglich, falls die Glieder a_μ und a_ν gleiche Länge haben; die Stufe sinkt dann neuerlich um 2. — Kommt schließlich etwa die Geschwindigkeit $\omega_\lambda = 2 \omega_s$ vor, so ist der zugehörige Spiegelpunkt die Null; da aber gleichzeitig der Faktor m_λ'' verschwindet, sinkt die Hüllkurvenstufe ebenfalls um 2. — Die einzige ungerade Stufenreduktion bringt $p = 0$ mit sich: Für Geraden durch A_{s-1} vermindert sich die Stufe um 1. — Wir fassen zusammen:

Satz 7. Die Hüllbahn einer Geraden, welche einer Planetenbewegung s^{ter} Stufe $\omega_1 : \dots : \omega_s$ unterworfen wird, ist im allgemeinen eine zirkuläre Radlinie $2s - 1^{\text{ter}}$ Stufe $\omega_1 : \dots : \omega_s : (2\omega_s - \omega_1) : \dots : (2\omega_s - \omega_{s-1})$. Für Geraden durch den Drehpunkt A_{s-1} der bewegten Ebene Σ_s erniedrigt sich die Stufe um 1 (ω_s entfällt). Ist eine Geschwindigkeit $\omega_\lambda = 2\omega_s$ vorhanden, dann sinkt die Hüllkurvenstufe um 2, ebenso für jedes Paar $\omega_\mu + \omega_\nu = 2\omega_s$; in diesem Fall kann für Geraden einer bestimmten Richtung eine weitere Reduktion um 2 eintreten, wenn $|a_\mu| = |a_\nu|$.

In Anlehnung an den Fall $s = 2, p = 0$, der die Zykloiden liefert (Abschn. 1), nennen wir nun die als Hüllkurven von Geraden erzeugbaren Radlinien „zykloidale“. Im Bedarfsfall unterscheiden wir dabei zykloidale Radlinien „im engeren Sinn“ für $p = 0$ und solche „im weiteren Sinn“ für $p \neq 0$. Letztere sind die Parallelkurven der ersteren und haben zufolge der nur um gerade Beträge erfolgenden Stufenreduktion immer eine ungerade Stufe, während zykloidale Radlinien im engeren Sinn immer von gerader Stufe sind. — Wir werden in den folgenden Abschnitten sehen, daß sich diese Unterfamilie von den allgemeinen Radlinien durch ähnliche ausgezeichnete Eigenschaften abhebt wie die Zykloiden von den Trochoiden.

Es erheben sich sogleich zwei wichtige, eng miteinander zusammenhängende Fragen: Woran erkennt man eine zykloidale Radlinie und wie findet man eine Planetenbewegung, bei der sie als Hüllbahn entsteht?

Nach dem Gesagten müssen die in der Radliniengleichung auftretenden Winkelgeschwindigkeiten auf der Zahlengeraden eine symmetrische Punktgruppe bilden, d. h. sie müssen sich in Paare ω_ν, ω_ν' mit gleicher, nichtverschwindender Summe aufteilen lassen; bei ungerader Stufe muß die übrigbleibende Geschwindigkeit ω_s gleich der halben Summe sein. Wir können die komplexe Darstellung also in der Form

$$z = b_s e^{i\omega_s t} + \sum_{\nu=1}^{s-1} (b_\nu e^{i\omega_\nu t} + b'_\nu e^{i\omega'_\nu t}) \quad \text{mit } \omega_\nu + \omega'_\nu = 2\omega_s \neq 0 \quad (22)$$

voraussetzen und müssen trachten, sie in die Gestalt (20) überzuführen. Der Koeffizientenvergleich liefert folgende Bestimmungsgleichungen für A, p und die a_ν :

$$A p i = -b_s, \quad a_\nu \frac{\omega_\nu'}{\omega_s} = 2b_\nu, \quad A^2 \bar{a}_\nu \frac{\omega_\nu}{\omega_s} = -2b'_\nu. \quad (23)$$

Bei der Auflösung unterscheiden wir am besten zwischen ungerader und gerader Stufe.

I. $b_s \neq 0$. (Zykloidale Radlinien im weiteren Sinne)

$$p = |b_s|, \quad A = \frac{b_s i}{|b_s|}, \quad a_v = 2 b_v \frac{\omega_s}{\omega_{v'}} = 2 \bar{b}_v' \frac{\omega_s}{\omega_v} \cdot \frac{b_s}{\bar{b}_s}. \quad (24)$$

Damit die beiden für a_v gefundenen Ausdrücke auch übereinstimmen, müssen die entsprechenden „Verträglichkeitsbedingungen“

$$\omega_v b_v \bar{b}_s = \omega_{v'} \bar{b}_v' b_s \quad (25)$$

erfüllt sein. Die Annahme $p = -|b_s|$ bringt nichts Neues.

II. $b_s = 0$. (Zykloidale Radlinien im engeren Sinne)

$$p = 0, \quad a_v = 2 b_v \frac{\omega_s}{\omega_{v'}}, \quad A^2 = -\frac{b_v' \omega_{v'}}{\bar{b}_v \omega_v}. \quad (26)$$

Die „Verträglichkeitsbedingungen“ bestehen hier darin, daß die für A^2 angegebenen Ausdrücke gleich ausfallen und Einheitsbetrag haben.

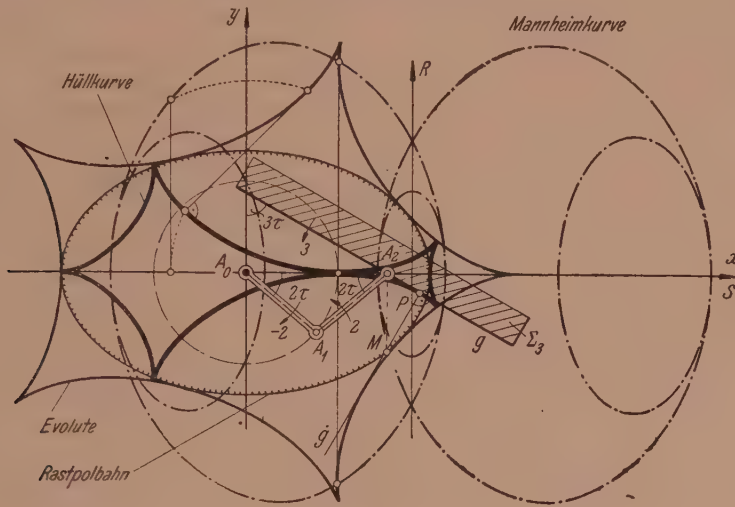


Abb. 8.

Bei der Aufteilung der Winkelgeschwindigkeiten auf zu ω_s symmetrische Paare ω_v , ω_v' ist noch eine gewisse Willkür offengelassen, da die Elemente eines Paares vertauscht werden können. Auf die zugehörige Verträglichkeitsbedingung hat dies keinen Einfluß, da sie lediglich in die konjugierte übergeht. Da bei den $s-1$ Paaren im ganzen 2^{s-1} derartige Vertauschungen vorgenommen werden können, kann die Radlinie auf ebensoviele verschiedene Arten als Hüllbahn entstehen. Jede Vertauschung äußert sich in der Darstellung (20) als Platzwechsel entsprechender Glieder in einer Klammer; die betroffene Bewegungskomponente $a_v e^{i m_v \varphi}$ geht dabei in eine neue $-A^2 \bar{a}_v e^{-i m_v'' \varphi}$ über.

Im Hinblick auf die Möglichkeiten einer Stufenreduktion ist es klar, daß dieselbe Radlinie auch noch auf unendlich viele Arten durch Planetenbewegungen höherer als s^{ter} Stufe erzeugbar ist; naturgemäß gilt aber das Interesse vor allem der Minimalstufe.

Satz 8. Eine Radlinie $2s-1^{\text{ter}}$ bzw. $2s-2^{\text{ter}}$ Stufe ist zyklodal, wenn die Werte der Winkelgeschwindigkeiten auf der Zahlengeraden durch eine symmetrische Punktgruppe dargestellt werden und überdies für das Gelenkpolygon gewisse Verträglichkeitsbedingungen (25) bzw. (26) erfüllt sind.

Die Radlinie ist dann auf 2^{s-1} Arten als Hüllkurve einer Geraden erzeugbar, die einer Planetenbewegung s^{ter} Stufe unterworfen wird. Im zweiten Fall — Radlinienstufe gerade — geht die Gerade durch den Drehpunkt der bewegten Ebene, sonst nicht.

Als Beispiel betrachten wir die zirkuläre Radlinie 4. Stufe der Sippe —1:1:2:4

$$z = 4e^{-it} + 2e^{it} + e^{2it} - e^{4it}, \quad (27)$$

deren Winkelgeschwindigkeiten die verlangte Symmetrie aufweisen; der Mittelwert ist $3/2$. Um Brüche zu vermeiden, verdoppeln wir alle Geschwindigkeiten, was der Einführung des neuen Parameters $\tau = t/2$ gleichkommt. Die Aufspaltung

$$\begin{array}{llllll} \omega_1 = -2, & \omega_1' = 8; & \omega_2 = 2, & \omega_2' = 4; & \omega_3 = 3 \\ b_1 = 4, & b_1' = -1; & b_2 = 2, & b_2' = 1; & b_3 = 0 \end{array}$$

führt gemäß (26) zu den Daten

$$p = 0, \quad a_1 = a_2 = 3, \quad A = \pm i.$$

Da die Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist, ist die vorgelegte Radlinie tatsächlich zykloldal und sie entsteht als Hüllkurve der η -Achse bei der Planetenbewegung 3. Stufe —2:2:3

$$z = 3e^{-2i\tau} + 3e^{2i\tau} + \zeta \cdot e^{3i\tau}. \quad (28)$$

Die Bewegung ist gemäß Abb. 8 einfach herzustellen: Der Drehpunkt A_2 vollführt eine harmonische Schwingung, während die Ebene Σ_3 mit anderthalbfacher Frequenz gleichförmig um ihn rotiert. — Der Berührungspunkt einer Lage von g mit der Hüllkurve ist der Fußpunkt des aus dem Momentanpol M auf g gefällten Lotes \dot{g} (vgl. Abschn. 4 und 10). Der Ort der Pole — die Rastpolbahn f_0 — wird gemäß (8) durch $z^* = 5e^{-2i\tau} + e^{2i\tau}$ dargestellt und ist eine Ellipse.

Die anderen drei Planetenbewegungen, die die Kurve (27) als Hüllbahn erzeugen, gehen aus (28) durch die wahlweisen Vertauschungen $3e^{-2i\tau} \rightarrow 3e^{3i\tau}$ und $3e^{2i\tau} \rightarrow 3e^{4i\tau}$ hervor. Es ist hervorzuheben, daß — der vorgenommenen Geschwindigkeitsverdopplung entsprechend — in allen Fällen die umhüllte Radlinie doppelt überdeckt erscheint.

7. Evoluten und Evolventen. Rektifikation.

Aus dem Vergleich der Gl. (18) und (19) von g und \dot{g} erkennen wir, daß auch die Kurvennormale \dot{g} einer gewissen Planetenbewegung unterworfen ist. Hieraus folgt, daß die Evolute der Hüllkurve l von g so wie diese selbst eine zykloidale Radlinie ist. Daß dieser Satz allgemeiner auch für die Evolutoiden von l gilt, ist unschwer zu beweisen.⁹

Wir denken uns die Tangente g um ihren Berührungspunkt um den Winkel β in die Lage g' gedreht. Setzen wir $e^{i\beta} = B$, so hat g' die Richtung AB und in Anlehnung an (18) eine Gleichung von der Bauart

$$\bar{A} \bar{B} z \cdot e^{-i\varphi} - A B \bar{z} \cdot e^{i\varphi} = C(\varphi),$$

wobei sich der Wert von C durch Einsetzen des Berührungspunktes z gemäß (20) errechnet. Wir finden so

$$\begin{aligned} \bar{A} \bar{B} z e^{i\varphi} - A B \bar{z} e^{i\varphi} = & -(B + \bar{B}) p i + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{s-1} [\bar{A} a_v (B m_v - \bar{B} m_v'') e^{i m_v' \varphi} - \\ & - A \bar{a}_v (\bar{B} m_v - B m_v'') e^{-i m_v' \varphi}]. \end{aligned} \quad (29)$$

Der Aufbau entspricht durchaus jenem der Gl. (18), so daß auch g' einer gewissen Planetenbewegung unterworfen ist. Schnitt von g' mit der durch Ableitung nach φ berechneten Evolutoidennormalen \dot{g}' liefert dann schließlich die eingehüllte Evolutoide

⁹ Zieht man durch die Punkte einer Kurve Strahlen, welche mit den Tangenten einen festen Winkel β einschließen, so hüllen diese eine ihrer „Evolutoiden“ ein, unter denen sich für $\beta = \pi/2$ die Evolute befindet.

$$z = -\frac{1}{2} A (1 + B^2) p i \cdot e^{i\varphi} + \frac{1}{4} \sum_{v=1}^{s-1} [a_v m_v'' (m_v'' - B^2 m_v) e^{i m_v \varphi} - A^2 \bar{a}_v m_v (m_v - B^2 m_v'') e^{-i m_v \varphi}]. \quad (30)$$

Dieselbe unterscheidet sich nicht wesentlich von der Grundkurve: Es ist im allgemeinen eine Radlinie gleicher Stufe und Sippe — als Hüllbahn sicherlich zyklodal — und fällt für $\beta = 0$ mit ihr zusammen. Lediglich bei der Evolute \hat{l} ($\beta = \pi/2$, $B = i$) verschwindet das bei zyklodalen Radlinien im weiteren Sinn vorhanden gewesene erste Glied; die Evolute ist mithin stets eine zyklodale Radlinie im engeren Sinn, die Evolutoiden hingegen nur bei ebensolchen Grundkurven ($p = 0$). Dieses Verhalten wird ohne weiteres verständlich, wenn man bedenkt, daß die zyklodalen Radlinien im weiteren Sinn Parallelkurven einer zyklodalen Radlinie im engeren Sinn sind. Die Schar der Parallelkurven von l stellt die Evoluten von \hat{l} dar.

Satz 9. Die Evoluten und die Evolutoiden einer zyklodalen Radlinie im engeren Sinn sind gleichartige Kurven derselben Sippe. Die Evoluten sind im allgemeinen zyklodale Radlinien im weiteren Sinn mit um 1 höherer Stufe.

Satz 10. Die Evolutoiden einer zyklodalen Radlinie im weiteren Sinn sind gleichartige Kurven derselben Sippe. Die Evolute ist eine zyklodale Radlinie im engeren Sinn mit um 1 niedrigerer Stufe. — Die Evoluten sind keine Radlinien.

Die letzte Behauptung stützt sich auf die Tatsache, daß die Evolute (30) wegen $B^2 = -1$ niemals eine zyklodale Radlinie im weiteren Sinn sein kann.

Auf Grund der dargelegten Verhältnisse ist zu erwarten, daß sich die Rektifikation der zyklodalen Radlinien elementar durchführen läßt. — Wie aus Abb. 9 hervorgeht, ist das Bogendifferential dS proportional dem Krümmungsradius R und dieser wieder ergibt sich als Abstand zwischen Tangente g und Evolutennormale \ddot{g} .

Subtraktion der Tangentengleichung (18) von der durch zweimalige Differentiation daraus hervorgehenden Gleichung von \ddot{g}

$$\bar{A} z \cdot e^{-i\varphi} - A \bar{z} \cdot e^{i\varphi} = \sum_{v=1}^{s-1} m_v'^2 (\bar{A} a_v e^{i m_v' \varphi} - A \bar{a}_v e^{-i m_v' \varphi}) \quad (31)$$

führt dann sofort auf

$$R = p - \frac{i}{2} \sum_{v=1}^{s-1} m_v m_v'' (\bar{A} a_v e^{i m_v' \varphi} - A \bar{a}_v e^{-i m_v' \varphi}) \quad (32)$$

und Integration von 0 bis φ gibt den zugehörigen Bogen

$$S = p \varphi - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{s-1} \frac{m_v m_v''}{m_v'} [\bar{A} a_v (e^{i m_v' \varphi} - 1) + A \bar{a}_v (e^{-i m_v' \varphi} - 1)]. \quad (33)$$

Da die beiden Summanden konjugiert-komplex sind, fällt der Bogen reell aus, wie es sein muß, und läßt sich durch die Funktionen \sin und \cos elementar ausdrücken.

Wir erkennen, daß für $p \neq 0$ die Bogenlänge mit steigendem φ über alle Grenzen wächst. Das bedeutet in Ergänzung zu Satz 10, daß die Evoluten der zyklodalen Radlinien im weiteren Sinn stets transzendente Kurven sein müssen.

Für $p = 0$ ist die Bogenlänge jedoch eine periodische Funktion von φ . Deutet man R und S als Normalkoordinaten, so erhält man die der Grundkurve zugeordnete sog. Mannheimsche Kurve. Diese stellt den Ort der Krümmungsmittelpunkte für die

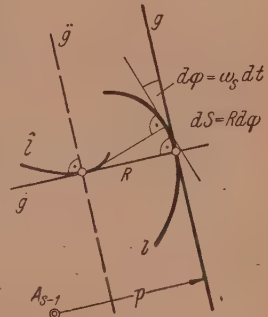


Abb. 9.

geradegestreckte Grundkurve dar, wenn man sich deren Linienelemente mit den Krümmungsradien starr verbunden denkt.¹⁰ Wir gelangen hier — wie aus der komplexen Darstellung $S + i R$ ohne weiteres ersichtlich ist — zu einer Radlinie, und zwar einer elliptischen, da jeder Exponent mit beiden Vorzeichen aufscheint.

Die nach Elimination von φ aus (32) und (33) verbleibende Beziehung $F(R, S) = 0$ ist die natürliche Gleichung der Grundkurve im Sinne von Cesàro. Es ist außerordentlich bemerkenswert, daß sie für algebraische Radlinien algebraisch ausfällt, da auch die durch sie dargestellte Mannheimkurve eine algebraische Radlinie ist.

Satz 11. Jede algebraische zyklodale Radlinie im engeren Sinn hat eine algebraische natürliche Gleichung. Ihre Mannheimkurve ist eine elliptische Radlinie.

Nebenbei bemerkt, ergeben sich auch die in diesen Fragenkreis gehörige „Radiale“¹¹ und die „Arcuiden“¹² als Radlinien.

Die Auflösung der Gleichung $R = 0$ führt auf die Spitzen der zyklodalen Radlinie. Gehen wir in (32) zunächst wieder von φ und den m_ν auf t und die ω_ν zurück und führen wir dann wie in Abschn. 5 den algebraischen Parameter $u = e^{it}$ ein, so erhalten wir eine algebraische Gleichung, deren Grad

$$Q = 2 \max |\omega_\nu - \omega_s| \quad (34)$$

die Anzahl der Spitzen angibt. Gleichzeitig ist dies die Anzahl der Scheitel, die ja durch die analog gebaute Gleichung $\dot{R} = 0$ gekennzeichnet sind und die Stellen mit stationärem Krümmungskreis darstellen. Ferner läßt sich noch zeigen, daß Q die Anzahl der Stellen ist, in welchen die Hüllbahn der Geraden g von den Bahnkurven der auf g gelegenen Punkte — die ja dieselbe Hülle haben — berührt wird.

Während die Formel (11) für die Ordnung ohne weiteres anwendbar ist und bei Hüllbahnen auf Grund ihrer Charakteristik den Ausdruck

$$N' = 2 \max (|\omega_\nu|, |2\omega_s - \omega_\nu|) = 2 (|\omega_s| + \max |\omega_\nu - \omega_s|) \quad (35)$$

liefert, muß bei der Bestimmung der Klasse gemäß Satz 4 die Anzahl Q der Spitzen berücksichtigt werden. Schneller kommen wir aber direkt zum Ziel, wenn wir fragen, wie oft die Tangente g , wie sie durch (18) dargestellt wird, durch einen festen Punkt (z, \bar{z}) geht. Die aufzulösende Gleichung hat nach Algebraisierung den Grad

$$M' = 2 \max (|\omega_s|, |\omega_\nu - \omega_s|). \quad (36)$$

Bei allen drei Charakteren ist darauf zu achten, daß sie sich auf die Hälfte ermäßigen, falls die Hüllkurve doppelt überdeckt wird, was für $p = 0$ eintreten kann.

Dies zeigt auch das der Abb. 8 zugrunde liegende Beispiel. Die bei der Planetenbewegung (28) als (doppelt überdeckte) Hüllbahn entstehende zyklodale Radlinie (27) ist von 8. Ordnung und 5. Klasse. Sie hat 5 Spitzen, die den Nullstellen des aus (32) folgenden Ausdrucks für den Krümmungshalbmesser

$$R = \frac{8}{3} (\cos \tau - 2 \cos 5\tau) \quad (37)$$

entsprechen; man findet $\cos 2\tau_{1,2} = \frac{1}{4} (1 \pm \sqrt{7})$ und $\cos \tau_3 = 0$.

Einmalige Integration ($d\varphi = 3 d\tau$) liefert die Bogenlänge

$$S = \frac{8}{5} (5 \sin \tau - 2 \sin 5\tau), \quad (38)$$

¹⁰ Für gewöhnlich wird die Mannheimkurve erklärt als Ort der dem Berührungspunkt zugeordneten Krümmungsmitten, wenn die Grundkurve auf einer Geraden rollt (Wieleitner¹).

¹¹ Ort der Endpunkte der durch den Ursprung parallelverschobenen Krümmungsradien der Grundkurve. Bis auf eine Drehung durch die Polargleichung (32) dargestellt (Wieleitner, § 30).

gezählt von $\tau = 0$ aus. Es ist zu beachten, daß beim Übergang über eine Spitze Krümmungsradius und Bogendifferential das Vorzeichen wechseln. Zur Bestimmung des Umfanges L sind daher die einzelnen Teilbögen zwischen den Spitzen zu berechnen; man findet schließlich

$$L = 6.4 \cdot \sqrt{38 + 6\sqrt{2}} - 9.6 \approx 34.035.$$

Für die Fläche ergibt sich auf Grund einer für alle Radlinien gültigen, leicht beweisbaren Formel

$$F = \pi \cdot \sum \omega_\nu |a_\nu|^2 = -6\pi;$$

das Minuszeichen rührt vom negativen Umlauf bei wachsendem τ her.

Die durch (37) und (38) dargestellte Mannheimkurve ist eine elliptische Radlinie 1 : — 1 : 5 : — 5 von 10. Ordnung und 12. Klasse mit 4 Selbstoskulationspunkten auf der S -Achse. Sie ist in jener Lage gezeichnet, die einer Geradstreckung der Grundkurve vom Selbstberührungspunkt ($\tau = 60^\circ$) aus entspricht.

Die Evolute der Grundkurve hat die durch Spezialisierung von (30) ableitbare Gleichung

$$z = \frac{1}{3} (20 e^{-it} + 2 e^{it} - e^{2it} + 5 e^{4it}) \quad (t = 2\tau)$$

und entsteht als Hüllbahn der ξ -Achse bei der Bewegung

$$z = 5 e^{-2i\tau} + e^{2i\tau} + \xi \cdot e^{3i\tau}.$$

Die Ellipsenbahn des Drehpunktes $\xi = 0$ ist die Rastpolbahn der Ausgangsbewegung (28) und wird von der Evolute an $Q/2 = 5$ Stellen berührt. Den 5 Spitzen der Evolute entsprechen die Scheitel der Grundkurve und S -parallele Tangenten der Mannheimkurve.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß die Evoluten der allgemeinen Radlinien keine Radlinien sind. Die einzige Ausnahme bildet die Ellipse, die eine Radlinie — 1 : 1 ist; ihre Evolute ist affin zur Astroide — 1 : 3, kann demnach als elliptische Radlinie 4. Stufe — 1 : 1 : 3 : — 3 angesehen werden.

8. Isoptische Linien.

Wir betrachten wie in Abschn. 6 wieder die Hüllbahn k einer Geraden g , die einer Planetenbewegung r^{ter} Stufe $\omega_1 : \dots : \omega_r = m_1 : \dots : m_{r-1} : 1$ unterworfen wird; neu sei lediglich, daß der Mittelpunkt A_0 der Bewegung nicht im Ursprung des Koordinatensystems, sondern im Punkt $z = a_0$ liegen möge. Entsprechend (18) wird die allgemeine Lage von g dann gegeben durch

$$\bar{A} z e^{-i\varphi} - A \bar{z} e^{i\varphi} = -2 p i + \sum_{\mu=0}^{r-1} (\bar{A} a_\mu e^{i m_\mu' \varphi} - A \bar{a}_\mu e^{-i m_\mu' \varphi}), \quad (39)$$

wobei

$$A = e^{i\alpha}, \quad p = \bar{p}, \quad m_\mu' = m_\mu - 1, \quad m_0 = 0.$$

Neben g fassen wir noch eine zweite Gerade h ins Auge, die einer anderen, gänzlich unabhängigen Planetenbewegung s^{ter} Stufe mit dem Zentrum b_0 unterworfen wird und dabei eine zykloidale Radlinie l umhüllt:

$$\bar{B} z e^{-i\varphi} - B \bar{z} e^{i\varphi} = -2 q i + \sum_{\nu=0}^{s-1} (\bar{B} b_\nu e^{i n_\nu' \varphi} - B \bar{b}_\nu e^{-i n_\nu' \varphi}) \quad (40)$$

mit

$$B = e^{i\beta}, \quad q = \bar{q}, \quad n_\nu' = n_\nu - 1, \quad n_0 = 0.$$

Wegen der Gleichheit des Parameters φ — der, wie erinnerlich, den Drehwinkel bedeutet — schließen die Geraden g und h während der Bewegung ständig den festen Winkel $\beta - \alpha$ miteinander ein (Abb. 10). Ihr Schnittpunkt P durchläuft mithin eine Kurve c , die als „isoptische“ Linie des Kurvenpaares k, l zu bezeichnen ist, da dasselbe aus den Punkten P gewissermaßen unter konstantem Winkel gesehen wird.

¹² Die Grundkurve wird geradegestreckt, wobei mit den Punkten die Normalen unter Beibehaltung ihrer Richtung mitgenommen werden. Die Hüllkurve der neuen Lagen ist eine Arcuide der Grundkurve (Wieleitner, § 31).

Die Gleichung von c ist ohne weiteres angebbar, da sich z aus (39) und (40) leicht ausrechnen läßt.¹³ Wir finden

$$(\bar{A}^2 - \bar{B}^2) \hat{z} = -2i(\bar{A}p - \bar{B}q)e^{i\varphi} + \sum_{\mu=0}^{r-1} (\bar{A}^2 a_{\mu} e^{im_{\mu}\varphi} - \bar{a}_{\mu} e^{-im_{\mu}''\varphi}) - \sum_{\nu=0}^{s-1} (\bar{B}^2 b_{\nu} e^{in_{\nu}\varphi} - \bar{b}_{\nu} e^{-in_{\nu}''\varphi}) \quad (41)$$

und erkennen die isoptische Kurve sofort als Radlinie von höchstens $2(r+s-1)$ ter Stufe. Eine Stufenreduktion tritt natürlich ein, wenn sich unter den m_{μ} und n_{ν} gleiche Werte befinden, also insbesondere für Grundkurven gleicher Sippe; ferner auch für zyklodale Radlinien im engeren Sinn ($p = q = 0$) und für konzentrische Grundkurven ($a_0 = b_0$).

Um die isoptischen Linien einer einzigen zyklodalen Radlinie $k = l$ aufzustellen, können wir den Parameterwinkel in (39), um den gewünschten Gesichtswinkel 2σ vermehren, wodurch wir auf $B = A e^{2i\sigma}$ und $b_{\nu} = a_{\nu} e^{2im_{\nu}\sigma}$ geführt werden; Einsetzung in (41) liefert dann den gesuchten Ort. Zweckmäßiger ist es jedoch, den Gesichtswinkel aufzuteilen und φ einmal um σ zu vermindern und einmal um σ zu vermehren; dementsprechend ist in (41) A bzw. B durch $A e^{\mp i\sigma}$ und a_{ν} bzw. b_{ν} durch $a_{\nu} e^{\mp im_{\nu}\sigma}$ zu ersetzen. Man erhält dann als Ortsgleichung

$$\hat{z} \cdot \sin 2\sigma = -2Ap i \sin \sigma \cdot e^{i\varphi} - \sum_{\nu=1}^{s-1} (a_{\nu} \sin m_{\nu}'' \sigma \cdot e^{im_{\nu}\varphi} + A^2 \bar{a}_{\nu} \sin m_{\nu} \sigma \cdot e^{-im_{\nu}''\varphi}). \quad (42)$$

Die isoptische Linie gehört somit der Sippe der Grundkurve an.

Stellen wir uns im übrigen die beiden Geraden g und h in P starr verbunden vor und betrachten wir die „Reitbewegung“ des Winkels gh auf dem Grundkurvenpaar k, l (bzw. der Einzelkurve $k = l$), so ist deren Gleichung auch leicht anzugeben: Da sich die Winkelschenkel mit der Geschwindigkeit 1 um ihren Scheitel P drehen, wird die Bewegung beschrieben durch

$$z = \hat{z} + \zeta \cdot e^{i\varphi}, \quad (43)$$

wobei die Koordinate \hat{z} von P gemäß (41) bzw. (42) einzusetzen ist. Ersichtlich handelt es sich um eine Planetenbewegung, deren Stufe und Sippencharakteristik im allgemeinen dieselben sind wie die der isoptischen Linie. — Wir fassen zusammen:

Satz 12. Die isoptischen Kurven eines Paares vollständig unabhängiger zyklodaler Radlinien, die als Hüllbahnen von Geraden bei Planetenbewegungen $m_1 : \dots : m_{r-1} : 1$ bzw. $n_1 : \dots : n_{s-1} : 1$ entstehen, sind im allgemeinen Radlinien $2(r+s-1)$ ter Stufe und haben die Sippencharakteristik $m_1 : (2-m_1) : \dots : m_{r-1} : (2-m_{r-1}) : n_1 : (2-n_1) : \dots : n_{s-1} : (2-n_{s-1}) : 2 : 1$. Die Bewegung des reitenden Winkels ist eine Planetenbewegung derselben Stufe und Sippe.

Sind die Grundkurven gleichartig ($r = s, m = n$), so reduziert sich die Stufe im allgemeinen auf $2s$ (in der Charakteristik fallen die n -Glieder fort). — Bei zyklodalen Grundkurven im engeren Sinn ($p = q = 0$) und bei konzentrischen ($a_0 = b_0$) sinkt

¹³ Den Fall $A = \pm B$, d. h. $g \parallel h$, schließen wir selbstverständlich aus.

die Stufe der isoptischen Linie im allgemeinen um 1; in der Charakteristik fehlt die 1 bzw. 2 am Ende.

Als Sonderfall dieses Satzes ergibt sich für $r = s = 2$, $m_1 = n_1 = m$, $p = q = 0$ und $a_0 = b_0 = 0$ die bekannte Tatsache, daß die isoptischen Linien eines Paares konzentrisch-ähnlicher Zykloiden — insbesondere auch zusammenfallender — konzentrische Trochoiden derselben Art sind:

$$(\bar{A}^2 - \bar{B}^2) \hat{z} = (\bar{A}^2 a - \bar{B}^2 b) e^{m i \varphi} + (\bar{b} - \bar{a}) e^{(2-m) i \varphi}. \quad (44)$$

Der Gesichtswinkel vollführt eine Planetenbewegung 3. Stufe $m : (2 - m) : 1$; gemäß Satz 2 rollt hierbei eine Ellipse auf einer Trochoide $m : (2 - m)$, die übrigens zur isoptischen Linie ähnlich ist.¹⁴ — Die allgemeinen isoptischen Linien zweier beliebiger Zykloiden sind Radlinien 5. Stufe.

Es sei noch bemerkt, daß die „orthoptischen“ Linien — bei welchen der gleitende Winkel ein rechter ist ($B = \pm A i$) — offensichtlich im allgemeinen keine besondere Stellung einnehmen.

9. Fußpunktskurven.

Fällt man auf die Tangenten einer Grundkurve k die Lote aus einem festen Punkt (dem sog. „Pol“), so erhält man eine Fußpunktskurve von k . Sie läßt sich offenbar als orthoptische Linie eines Kurvenpaares k, l auffassen, wenn l auf einen Punkt zusammenschrumpft.

Wir gelangen demgemäß sofort zur Gleichung der Fußpunktskurve einer zyklidalen Radlinie (39), wenn wir in (41) alle $b = 0$, ferner $B = A i$ und $q = 0$ setzen:¹⁵

$$\hat{z} = -A i p e^{i \varphi} + \frac{1}{2} \sum_{v=0}^{s-1} (a_v e^{i m_v \varphi} - A^2 \bar{a}_v e^{-i m_v'' \varphi}). \quad (45)$$

Die durch $b_0 = 0$ erfolgte Verlegung des Poles in den Nullpunkt O bedeutet wegen der Belassung von a_0 keine Einschränkung. Die Festsetzung $m_0 = 0$ berücksichtigend, ersehen wir, daß es sich im allgemeinen um eine Radlinie 2^{ter} Stufe handelt. Sie besitzt in O einen mehrfachen Punkt, den durch O gehenden Tangenten von k entsprechend; deren Anzahl M' ist im algebraischen Fall durch (36) festgelegt.

Die allgemeinen Fußpunktskurven der Zykloiden ($s = 2$, $p = 0$) sind Radlinien 3. Stufe.

In Anlehnung daran, daß die Mittelpunkts-Fußpunktskurven der Zykloiden „Rosenkurven“ heißen (Abschn. 1), wollen wir allgemein die als Fußpunktskurven von zyklidalen Radlinien auftretenden besonderen Radlinien „rosenartige“ nennen. Entsprechend der Grundkurve könnte man auch hier solche „im engeren Sinn“ und „im weiteren Sinn“ unterscheiden. Diese Unterfamilie von Radlinien ist durch eine besonders einfache Polargleichung ausgezeichnet, denn der Polwinkel ist $\psi = \varphi + \alpha - \pi/2$ und der Radiusvektor $r = \hat{z} \cdot e^{-i \psi} = \hat{z} \cdot \bar{A} i e^{-i \varphi}$, also im wesentlichen ein trigonometrisches Polynom.

Satz 13. Die Fußpunktskurven einer zyklidalen Radlinie, die als Hüllbahn einer Geraden bei einer Planetenbewegung s^{ter} Stufe $\omega_1 : \dots : \omega_s$ entsteht, sind im allgemeinen „rosenartige“ Radlinien 2^{ter} Stufe $\omega_1 : (2 \omega_s - \omega_1) : \dots : \omega_s : 2 \omega_s$, die im Pol einen vielfachen Punkt haben.

Bei zyklidalen Radlinien im engeren Sinn ($p = 0$) erniedrigt sich die Stufe der Fußpunktskurven im allgemeinen um 1, ebenso für den Mittelpunkt als Pol ($a_0 = 0$); in der Charakteristik fehlt das Glied ω_s bzw. $2 \omega_s$ am Ende.

¹⁴ W. Wunderlich: Z. angew. Math. Mech. 17 (1937).

¹⁵ Wir schreiben wieder s statt r und v statt μ .

Es erhebt sich nun sogleich wieder die Doppelfrage: Woran erkennt man eine rosenartige Radlinie und wie findet man die zugehörige Grundkurve?

Was die Winkelgeschwindigkeiten betrifft, so müssen diese auf der Zahlengeraden nach Hinzunahme des Nullpunktes $\omega_0 = 0$ eine symmetrische Punktgruppe bilden; die Mitte entspricht dem Wert ω_s . Wir können die Radliniengleichung also wie bei den Hüllbahnen in der Gestalt (22) voraussetzen, wobei diesmal lediglich der Summenzeiger von 0 bis s läuft. Koeffizientenvergleich mit (45) liefert dann folgende Bestimmungsgleichungen für A , p und die a_v :

$$A p i = -b_s, \quad a_v = 2 b_v, \quad A^2 \bar{a}_v = -2 b_v'. \quad (46)$$

Die Auflösung

$$a_v = 2 b_v, \quad A^2 = -b_v' / \bar{b}_v, \quad p = \bar{A} i b_s \quad (v = 0 \dots s-1) \quad (47)$$

ist natürlich nur dann brauchbar, wenn alle s Werte für A^2 gleich ausfallen und Einheitsbetrag haben; $v = 0$ kann eigentlich außer Betracht bleiben, da sich die betreffende Forderung durch Veränderung von b_0 erzwingen läßt, was auf eine Parallelverschiebung hinausläuft.

Satz 14. Eine Radlinie $z = b_s e^{i \omega_s t} + \sum_{v=0}^{s-1} (b_v e^{i \omega_v t} + b_v' e^{i \omega_v' t})$ mit $\omega_0 = 0$ ist dann und nur dann eine rosenartige mit dem Knoten im Nullpunkt, wenn $\omega_v + \omega_v' = 2 \omega_s \neq 0$, $|b_v| = |b_v'|$ und alle Quotienten b_v' / \bar{b}_v denselben Wert haben.

Die Polargleichung läßt sich dann auf die Form $r = p + \sum_{v=0}^{s-1} c_v \sin(m_v' \varphi + \gamma_v)$ bringen.

Als Beispiel betrachten wir wieder das gerade Dreiblatt (9). Die Winkelgeschwindigkeiten ± 1 und 2 bilden nach Hinzunahme der Null eine symmetrische Punktgruppe mit der Mitte $1/2$. Um Brüche zu vermeiden, verdoppeln wir alle Geschwindigkeiten; schreiben wir

$$\zeta = z + 1 = 1 + e^{-2i\tau} + e^{2i\tau} + e^{4i\tau},$$

dann können wir etwa so aufspalten:

$$\begin{array}{cccccc} \omega_0 = 0, & \omega_0' = 2; & \omega_1 = -2, & \omega_1' = 4; & \omega_2 = 1 & \\ b_0 = 1, & b_0' = 1; & b_1 = 1, & b_1' = 1; & b_2 = 0 & \end{array}$$

und finden nach (47) als Bestimmungstücke der Hüllbewegung

$$a_0 = a_1 = 2, \quad A = \pm i, \quad p = 0.$$

Die Grundkurve entsteht mithin als Hüllbahn der η -Achse bei der gewöhnlichen Planetenbewegung

$$z = \zeta - 1 = 1 + 2 e^{-2i\tau} + \zeta \cdot e^{i\tau},$$

ist also eine Steinerzykloide. Das Dreiblatt ist deren Fußpunktskurve für den Pol $z = -1$ ($\zeta = 0$), demnach eine rosenartige Radlinie. Ihre Polargleichung kann auf die Form

$$r = 2(\cos \tau + \cos 3\tau) = 4 \cos \tau \cos 2\tau$$

gebracht werden (vgl. Abb. 4).

10. Konstruktionsvorschriften.

Anschließend sollen noch die Konstruktionsvorschriften auseinandergesetzt werden, die der zeichnerischen Ermittlung von Punkten, Tangenten und Krümmungskreisen der Radlinien zugrunde liegen.

Die Auffindung von Punkten einer durch ihre komplexe Darstellung

$$z = \sum_{v=1}^s a_v e^{i \omega_v t} \quad (5)$$

gegebenen Radlinie wird dem Wesen nach durch die Formel selbst angesagt: Man

drehe die Vektoren a_ν aus der Anfangslage um die zugehörigen Winkel $\omega_\nu t$ (mit Berücksichtigung des Vorzeichens!) und setze sie dann, von A_0 ausgehend, zu einem Polygon $A_0 A_1 \dots A_s$ zusammen; der Endpunkt $A_s = P$ ist ein Kurvenpunkt.

Die Richtung der Tangente wird durch $\dot{z} = dz/dt$ angegeben, die Richtung der Kurvennormale mithin durch

$$\dot{z} \dot{\bar{z}} = - \sum_{\nu=1}^s \omega_\nu a_\nu e^{i \omega_\nu t}. \quad (48)$$

Wir strecken demzufolge die Glieder des Polygons im Verhältnis ihrer Geschwindigkeiten und setzen sie — am besten von P aus rückwärtsschreitend — zu einem neuen Polygon zusammen, dessen Endpunkt die Normalenrichtung gibt (Abb. 11). Da nur das Verhältnis der ω_ν wesentlich ist, haben wir eine gewisse Freiheit in der Wahl des Maßstabes.

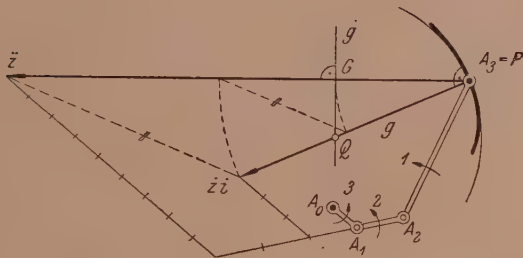


Abb. 11.

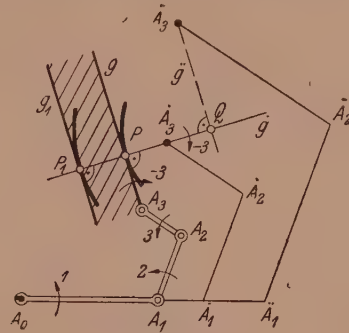


Abb. 12.

Die Gleichung der Normalen g im Punkt $P(z)$ lautet — mit \bar{z} , Zeit \bar{t} als laufenden Koordinaten —

$$(\bar{z} - z) \dot{\bar{z}} + (\bar{t} - \bar{t}) \dot{z} = 0. \quad (49)$$

Ihre Hüllkurve — die Evolute — wird von g im Krümmungsmittelpunkt Q von P berührt und dieser Punkt wird aus g von der durch Ableitung nach t gewonnenen Geraden \dot{g}

$$(\bar{z} - z) \ddot{\bar{z}} + (\bar{t} - \bar{t}) \ddot{z} = 2 \dot{z} \dot{\bar{z}} \quad (50)$$

ausgeschnitten; \dot{g} verläuft senkrecht zum Vektor

$$\ddot{z} = - \sum_{\nu=1}^s \omega_\nu^2 a_\nu e^{i \omega_\nu t}, \quad (51)$$

der leicht zu zeichnen ist. Die Lage wollen wir durch den Schnittpunkt G mit der durch P gehenden Trägergeraden von \ddot{z} festlegen, deren Gleichung

$$(\bar{z} - z) \ddot{\bar{z}} - (\bar{t} - \bar{t}) \ddot{z} = 0 \quad (52)$$

lautet. Addition von (50) und (52) liefert als Koordinate von G

$$\bar{z} = z + \frac{\ddot{z} z}{\ddot{z} \bar{z}} = z + \frac{|\ddot{z}|^2}{|\ddot{z}|^2} \cdot \bar{z}. \quad (53)$$

Wir haben also bloß den in P angehängten Vektor \ddot{z} zweimal im Verhältnis der Längen $|\ddot{z}| : |\ddot{z}|$ zu verkürzen und in dem so gefundenen Punkt G das Lot zu errichten; dieses schneidet g in der gesuchten Krümmungsmitte Q (Abb. 11).

Ähnlich läßt sich die Hüllbahn einer Geraden g beherrschen, die einer Planetenbewegung unterworfen wird. Gemäß (8) ermitteln wir zunächst das Momentan-

zentrum, indem wir alle Glieder a_v des die Bewegung erzeugenden Polygons $A_0 \dots A_{s-1}$ mit den zugehörigen Faktoren $-m_v' = 1 - \omega_v/\omega_s$ multiplizieren; der Endpunkt A_{s-1} des daraus zusammengesetzten neuen Polygons ist der gesuchte Momentanpol, aus welchem wir lediglich das Lot \dot{g} auf g zu fallen brauchen, um den Berührungspunkt P zu erhalten (Abb. 12).

Bedenken wir, daß g vermöge des 2. Polygons eine gleichartige Bewegung vollführt wie g selbst, dann ist es klar, daß wir das Verfahren nur zu wiederholen brauchen, um im Berührungspunkt der von g eingehüllten Evolute die Krümmungsmitte Q für P zu gewinnen (Abb. 12).

Wie man sieht, sind die gegebenen Zeichenvorschriften von besonderem Wert, weil sie die gesamte, so umfassende und weitverzweigte Familie der Radlinien nach einfachen und einheitlichen Grundsätzen zu behandeln gestatten.

(Eingegangen am 9. September 1946.)

Drillschwingungen von Luftschraubenblättern.

Von H. Parkus, Wien.

Mit 1 Textabbildung.

Einleitung.

Die Berechnung der Drillschwingungen von Luftschraubenblättern sowie der Blätter von Drehflügelflugzeugen erfolgt derzeit, soweit dem Verfasser bekannt ist, ausschließlich auf Grund der St. Venantschen Torsionstheorie, wobei gleichzeitig auch der Einfluß der Fliehkräfte vernachlässigt wird. Nun setzt die St. Venantsche Theorie voraus, daß sich die Querschnitte bei der Verdrehung frei verwölben können, wozu außer den entsprechenden Einspannbedingungen auch ein über die Stablänge konstantes Drehmoment notwendig ist. Das letztere ist aber bei einer Drehschwingung nicht der Fall. Freie Verwölbung der Endquerschnitte kann man nur bei den Blättern von Drehflügelflugzeugen voraussetzen, Luftschraubenblätter hingegen müssen im Einspannquerschnitt an der Nabe eben bleiben.

Es erscheint daher wünschenswert, den Einfluß dieser Vernachlässigungen zu untersuchen.

Im nachstehenden wird zunächst die Differentialgleichung der Drillschwingungen aufgestellt und dann unter vereinfachenden Annahmen sowohl für die Luftschraube als für das Drehflügelblatt integriert. An einem Beispiel wird das Ergebnis zahlenmäßig nachgeprüft.

Aufstellung der Schwingungsgleichung.

Die freien Drehschwingungen erfolgen um die Schubmittelpunkte der Querschnitte als Drillruhepunkte; die Verbindungslinie der Schubmittelpunkte (elastische Achse) kann als Gerade aufgefaßt werden. Wenn Schwerachse und elastische Achse nicht zusammenfallen, sind die Drillschwingungen mit Biegeschwingungen gekoppelt. Man kann aber genügend genau annehmen, daß die Schwingungsform der reinen Biegeschwingung und die Schwingungsform der reinen Drillschwingung bei der Koppelung erhalten bleiben, so daß sich die Frequenzen der Koppelschwingung sehr einfach berechnen lassen. Wir untersuchen im folgenden nur die reine Drillschwingung. Die Biegeschwingungen sind in der Literatur schon mehrfach behandelt worden.¹

¹ Vgl. z. B. E. Maier: Biegeschwingungen von spannungslos verwundenen Stäben, insbesondere von Luftschraubenblättern. Ing.-Arch. 11, 73 (1940).

Wir fassen nach Grammel² den Flügel als blattförmigen Stab auf (Abb. 1). Die x -Achse unseres rechtsorientierten Koordinatensystems lassen wir mit der elastischen Achse und die z -Achse mit der Drehachse zusammenfallen. Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung sei ω . Der Winkel, um den sich ein Querschnitt aus seiner Ruhelage heraus verdreht, werde mit $\vartheta(x, t)$ bezeichnet. t bedeutet die Zeit. In Abb. 1 ist das Blatt in verdrehtem Zustande dargestellt. Der Winkel zwischen dem Anfangsquerschnitt $x = R_0$ und dem Querschnitt an der Stelle x ist $\alpha - \alpha_0 + \vartheta$, wobei α der Verwindung im spannungslosen Zustand entspricht.

Wie in der Einleitung ausgeführt, liegt hier nicht nur St. Venantsche Torsion, sondern auch Wölbkrafttorsion vor. Dann ist $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ nicht unabhängig von x . Wir machen aber trotzdem für die Verschiebungen u , v und w in x -, y - und z -Richtung den St. Venantschen Ansatz

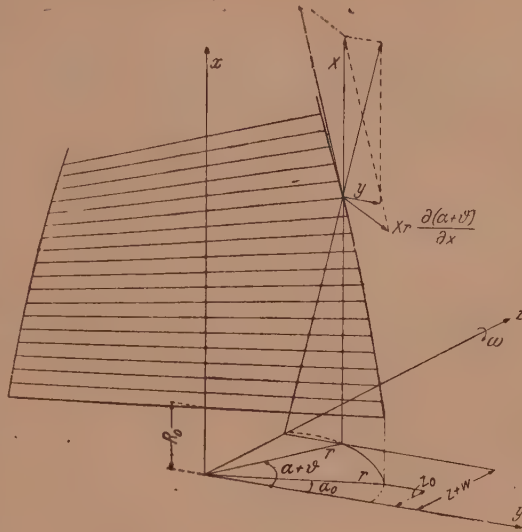


Abb. 1.

$$u = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \varphi(y, z), \quad v = -\vartheta z, \quad w = +\vartheta y, \quad (1)$$

wo φ die Torsionsfunktion bedeutet.³ Diese Annahme ist ohne weiteres für dünnwandige offene oder geschlossene Querschnitte zulässig,⁴ wie sie bei Drehflügeln meist verwendet werden. Aber auch für den bei Luftschrauben ausschließlich in Frage kommenden schmalen Vollquerschnitt ist der Ansatz noch einigermaßen brauchbar, wie in Abschn. 3 gezeigt wird.

Die drei Fliehkraftkomponenten sind, wenn mit ρ die spezifische Masse des Werkstoffes bezeichnet wird,

$$X = \rho \omega^2 x, \quad Y = \rho \omega^2 y, \quad Z = 0. \quad (2)$$

Nach Grammel² zerlegen wir die X -Komponente in zwei Teile: in einen Teil, der in Richtung der „Längsfaser“ fällt und nur Zug hervorruft, und in eine Komponente parallel zur y - z -Ebene, welche die Größe $X r \frac{\partial(\alpha + \vartheta)}{\partial x}$ hat und Verdrehung bewirkt. Das Drehmoment an der Stelle x ist dann, soweit es von der Fliehkraft herrührt,

$$M_\omega = - \int_x^R dx \int_F Y(z + w) dF - \int_x^R dx \int_F X r^2 \frac{\partial(\alpha + \vartheta)}{\partial x} dF.$$

F ist die Querschnittsfläche, R der Schraubenradius. Für die Verschiebungskomponente w und die Fliehkraftkomponenten die Werte nach Gl. (1) und (2) eingesetzt, ergibt sich

$$M_\omega = -\rho \omega^2 \int_x^R \left(J_{yz} + J_0 x \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) dx - \rho \omega^2 \int_x^R \left(J_z \vartheta + J_0 x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx \quad (3)$$

² R. Grammel: Die Trägheitswirkungen in der Luftschraube des kurvenden Flugzeuges. Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung, H. 36. München u. Berlin. 1941.

³ Vgl. z. B. J. W. Geckeler: Elastostatik. Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 144. Berlin. 1928.

⁴ R. Kappus: Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich. Luftf.-Forschg. 14, 444 (1937). — H. Neuber: Schubmittelpunkt und Querschnittsverwölbung dünnwandiger Träger. Z. angew. Math. Mech. 21, 91 (1941).

mit

$$J_{yz} = \int_F yz dF, \quad J_z = \int_F y^2 dF, \quad J_0 = \int_F r^2 dF. \quad (4)$$

Das erste Glied rechts in Gl. (3) ist von ϑ unabhängig und ohne Einfluß auf die Eigenschwingungszahl. Wir lassen es daher weiterhin weg.

Die Differentialgleichung der Verdrehung lautet

$$M = G J_d \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - E \frac{\partial}{\partial x} \left(J_w \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right) \quad (5)$$

bzw. nach Differentiation

$$\frac{\partial M}{\partial x} = G \frac{\partial}{\partial x} \left(J_d \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) - E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(J_w \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right) = -m_x, \quad (6)$$

wo m_x das verteilte Moment (Moment je Längeneinheit) bedeutet.⁴ Mit J_w sei der von Kappus⁴ eingeführte „Wölbwiderstand“ bezeichnet. Mit dem Ansatz Gl. (1) ergibt er sich aus der Torsionsfunktion φ zu

$$J_w = \int_F \varphi^2 dF \quad (7)$$

und hat die Dimension [cm⁶]. GJ_d ist die Drillsteifigkeit.

Die verteilten Momente rühren vom Trägheitswiderstand $-\Theta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}$ und von den Fliehkräften her.⁵ Hierin ist Θ das Massenträgheitsmoment bezüglich der Drehachse x , wobei die Masse der mitschwingenden Luft mitberücksichtigt werden kann.⁶

Wir haben somit

$$\frac{\partial M}{\partial x} = +\Theta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + \frac{\partial M_\omega}{\partial x}.$$

Dies in Gl. (6) eingesetzt, entsteht unter Berücksichtigung von Gl. (3)

$$-\Theta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + G \frac{\partial}{\partial x} \left(J_d \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) - E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(J_w \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right) - \varrho \omega^2 \left(J_z \vartheta + J_0 x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) = 0. \quad (8)$$

Bezeichnen wir mit ν die Kreisfrequenz der Drehschwingung und führen mit

$$\xi = \frac{x - R_0}{L}$$

dimensionslose Koordinaten längs der Blattachse ein ($L = R - R_0 \dots$ Blattlänge), so gilt

$$\vartheta = \beta(\xi) e^{i\nu t} \quad (9)$$

und Gl. (8) geht über in

$$\frac{E}{L^4 \Theta} (J_w \beta'')'' - \frac{G}{L^2 \Theta} (J_d \beta')' + \varrho \omega^2 \frac{J_0}{\Theta} \left(\xi + \frac{R_0}{L} \right) \beta' - \left(\nu^2 - \varrho \omega^2 \frac{J_z}{\Theta} \right) \beta = 0. \quad (10)$$

Gl. (10) wird man im allgemeinen Fall, d. h. bei über die Stabachse veränderlichem Querschnitt nach einem der bekannten Näherungsverfahren lösen, indem man von einer angenommenen Schwingungsform ausgeht, die den Randbedingungen genügt.⁷ In den meisten Fällen dürfte es jedoch ausreichen, zunächst J_w und ω zu vernachlässigen und die so erhaltene Eigenfrequenz $\bar{\nu}$ der St. Venantschen Schwingung nachträglich mit einem mittleren Wert von J_w zu verbessern. Im vierten Abschnitt wird dies an einem Beispiel durchgeführt.

⁵ Die Massenkkräfte, welche durch die periodische Verwölbung entstehen, könnten ohne weiteres mit in Rechnung gestellt werden (A. E. H. Love: The Mathematical Theory of Elasticity, S. 429. Cambridge. 1934). Sie sind aber gegenüber den anderen Kräften belanglos.

⁶ R. Kassner und H. Fingado: Das ebene Problem der Flügelschwingung. Luftf.-Forsch. 13, 374 (1936).

⁷ Eine Zusammenstellung der hier in Frage kommenden Methoden findet man bei Biezeno-Grammel: Technische Dynamik, S. 148 ff. Berlin. 1939.

Der Wölbwiderstand beim Vollprofil.

Den Drillwiderstand J_d berechnet man zweckmäßig nach der St. Venantschen Näherungsformel

$$J_d = \frac{F^4}{40 J_p}. \quad (11)$$

F ist die Querschnittsfläche und J_p das polare Trägheitsmoment bezüglich der Schwerachse (J_0 , J_z und Θ hingegen beziehen sich auf den Schubmittelpunkt!).⁸

Zur Berechnung des Wölbwiderstandes J_w ersetzen wir den Blattquerschnitt durch eine Ellipse mit den beiden Hauptachsen b (Blattbreite, Profiltiefe) und d (Blattdicke). Das Dickenverhältnis werde mit κ bezeichnet:

$$\kappa = \frac{d}{b}. \quad (12)$$

Die Torsionsfunktion φ ist dann³

$$\varphi = -\frac{b^2 - d^2}{b^2 + d^2} \eta \zeta = -\frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa^2} \eta \zeta,$$

wenn η und ζ Koordinaten in Richtung der beiden Hauptachsen bedeuten. Nach Einsetzen in Gl. (7) und Integration entsteht

$$J_w = \frac{\pi \kappa^3}{1536} \left(\frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa^2} \right)^2 b^6. \quad (13)$$

A. Föppl hat die Verdrillung eines unendlich langen Stabes mit elliptischem Querschnitt behandelt, dessen Verwölbung an einem Ende verhindert ist.⁹ Es soll nun der Ausdruck Gl. (13) für den Wölbwiderstand mit der Föpplschen Lösung verglichen werden. Zu diesem Zweck integrieren wir die Differentialgleichung (5) mit den Randbedingungen $\beta = 0$ und $\beta' = 0$ in $x = 0$ und $\beta'' = 0$ in $x = \infty$ und erhalten

$$\beta' = \frac{M}{G J_d} (1 - e^{-\gamma x}).$$

Dies ist nun aber genau der Föpplsche Ansatz. Dabei bedeutet

$$\gamma = \sqrt{\frac{G J_d}{E J_w}},$$

also

$$J_w = \frac{G J_d}{E \gamma^2} = \frac{J_d}{2(1 + \mu) \gamma^2}.$$

Föppl berechnet für γ^2 den Ausdruck (in den hier verwendeten Bezeichnungen geschrieben):

$$\gamma^2 = \frac{4}{\kappa b^2} \left(\sqrt{\left(\frac{1 + \kappa^2}{\kappa} \right)^2 + \frac{16}{1 + \mu}} - \frac{1 + \kappa^2}{\kappa} \right).$$

Für kleine Werte von κ läßt sich dies noch zu

$$\gamma^2 = \frac{32}{(1 + \mu)(1 + \kappa^2)b^2}$$

vereinfachen. Damit wird der Wölbwiderstand, wenn für J_d die für die Ellipse gültige Beziehung

$$J_d = \frac{b^3 d^3 \pi}{16(b^2 + d^2)} = \frac{\pi}{16} \frac{\kappa^3}{1 + \kappa^2} b^4$$

eingesetzt wird:

$$J_w = \frac{\pi \kappa^3}{1024} b^6.$$

Dieser Wert ist um etwa ein Drittel größer als der nach Gl. (13). Um sicher zu rechnen, soll daher Gl. (13) den weiteren Untersuchungen zugrunde gelegt werden.

⁸ Bezüglich der Bestimmung des Schubmittelpunktes vgl. man A. und L. Föppl: Drang und Zwang, Bd. II, S. 121. München u. Berlin. 1928.

⁹ A. a. O., S. 114.

Luftschrauben.

An der Nabe, also in $\xi = 0$, kann sich das Blatt nicht verwölben. Es muß somit dort $\beta' = 0$ sein (das ganze Moment wird durch Wölbkrafttorsion übertragen). Außerdem gilt dort $\beta = 0$. Am freien Ende $\xi = 1$ ist die Verwölbung unbehindert, $\beta'' = 0$, sowie auch das Moment gleich Null, daher noch $M' = 0$. nach Gl. (5)

Wir nehmen jetzt konstanten Blattquerschnitt an, setzen $\varrho J_z \approx \varrho J_0 \approx \Theta$ und vernachlässigen $\left(\xi + \frac{R_0}{L}\right) \beta'$ gegenüber β . Dann lautet die Schwingungsgleichung (10):

$$\beta^{(4)} - a^2 \beta'' - \lambda \beta = 0, \quad (14)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$\frac{G J_d L^2}{E J_w} = a^2, \quad (\nu^2 - \omega^2) \frac{\Theta L^4}{E J_w} = \lambda. \quad (15)$$

Gl. (14) hat die charakteristische Gleichung

$$\alpha^4 - a^2 \alpha^2 - \lambda = 0$$

und besitzt somit die allgemeine Lösung

$$\beta = A \sin \alpha_1 \xi + B \cos \alpha_1 \xi + C \sin \alpha_2 \xi + D \cos \alpha_2 \xi \quad (16)$$

mit

$$\alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{4\lambda}{a^4}} + 1}, \quad \alpha_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{4\lambda}{a^4}} - 1}.$$

Nun ist, wie man sich leicht überzeugt, $\frac{4\lambda}{a^4} \ll 1$. Setzen wir daher weiter

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{a} = c, \quad (17)$$

so gilt

$$\alpha_1 = a, \quad \alpha_2 = c. \quad (18)$$

Die vier Randbedingungen liefern mit der Lösung (16) ein in den vier Integrationskonstanten lineares Gleichungssystem, dessen Determinante verschwinden muß. Das ergibt, wenn noch Gl. (18) beachtet wird, die Beziehung

$$\frac{c}{a} \operatorname{Tg} a \operatorname{tg} c + 1 - \frac{c^2}{a^2 \operatorname{Cof} a \cos c} = 0. \quad (19)$$

Nun kann man setzen (vgl. das folgende Beispiel):

$$\operatorname{Tg} a = 1, \quad \operatorname{Cof} a = \frac{e^a}{2}, \quad \cos c = \frac{\pi}{2} - c.$$

Es ist dann sofort zu sehen, daß das dritte Glied links in Gl. (19) vernachlässigt werden darf, so daß wir erhalten

$$c \operatorname{tg} c = -a \quad (20)$$

als Bestimmungsgleichung für c . Hierin ist gemäß Gl. (15)

$$a = L \sqrt{\frac{G J_d}{E J_w}}. \quad (21)$$

Aus c folgt die Kreisfrequenz der Eigenschwingung zu

$$\nu^2 = \frac{G J_d}{L^2 \Theta} c^2 + \omega^2. \quad (22)$$

Mit $E J_w = 0$ und $\omega = 0$ ergibt sich $a = \infty$, $c = \frac{n\pi}{2}$ ($n = 1, 3, 5 \dots$) entsprechend der bekannten Lösung für die Eigenfrequenzen $\bar{\nu}$ bei alleiniger Berücksichtigung der Drillsteifigkeit.

Zur niedrigsten Eigenfrequenz ν_0 gehört der Bereich $\pi > c \gg \frac{\pi}{2}$. Es ist dann

$$\nu_0^2 = \frac{4c^2}{\pi^2} \bar{\nu}_0^2 + \omega^2, \quad (23)$$

wo $\bar{\nu}_0$ die Grundfrequenz der St. Venantschen Schwingung ist. Aus Tab. 1 sind zu einem gegebenen a die entsprechenden c -Werte zu entnehmen.

Tabelle 1.

$\frac{c}{\pi/2}$	$\frac{4c^2}{\pi^2}$	$c \operatorname{tg} c$	1·58	1·59	1·60	1·61	1·62	1·63	1·64
1	1·01	1·02	1·04	1·05	1·06	1·08	1·09		
— ∞	— 171	— 83	— 55	— 41	— 33	— 27	— 24		
1·65	1·66	1·67	1·68	1·69	1·70	1·71	1·72		
1·10	1·12	1·13	1·14	1·16	1·17	1·19	1·20		
— 21	— 19	— 17	— 15	— 14	— 13	— 12·2	— 11·4		
1·73	1·74	1·75	1·76	1·77	1·78	1·79	1·80		
1·21	1·23	1·24	1·26	1·27	1·28	1·30	1·31		
— 10·8	— 10·2	— 9·7	— 9·2	— 8·8	— 8·4	— 8·0	— 7·7		

Anstatt Gl. (10) direkt zu lösen, kann man dann das im folgenden Beispiel gezeigte überschlägige Verfahren anwenden.

Es sei eine Holzluftschraube mit einem Außendurchmesser $D = 3$ m, einem Nabendurchmesser $D = 0.3$ m und einer Drehzahl $n = 1400$ U/min gegeben. Es ist also $L = 135$ cm und $\omega = 146$ s⁻¹. Die aus Gl. (10) mit $J_w = \omega = 0$ und den Randbedingungen $\beta = 0$ in $\xi = 0$ sowie $\beta' = 0$ in $\xi = 1$ berechnete kleinste Kreisfrequenz der wölbkraftfreien Drillschwingung sei $\bar{\nu}_0 = 450$ s⁻¹. Wir wählen nun eine mittlere Flügeltiefe $b_m = 170$ mm, $d_m = 27$ mm, somit $\kappa_m = 27/170 = 0.158$. Aus Gl. (11) folge $J_a = 48$ cm⁴, $GJ_a = 62.5 \cdot 10^4$ kgcm². Gl. (13) liefert $J_w = 175$ cm⁶, $EJ_w = 26.2 \cdot 10^6$ kgcm⁴. Mit Gl. (21) erhalten wir daraus $\alpha = 23.1$ und entnehmen aus Tab. 1 den Wert $\frac{4c^2}{\pi^2} = 1.09$. Somit wird gemäß Gl. (23) $\nu_0^2 = 1.09 \cdot 202\,500 + 21\,300 = 242\,025$, $\nu_0 = 492$ s⁻¹. Dieser Wert ist sicherlich noch etwas kleiner als der genaue Betrag gemäß Gl. (10), da die Wölbsteifigkeit gegen die Nabe hin, wo die größte Wölbbehinderung auftritt, noch zunimmt.

Drehflügel (Hub- und Tragschrauber).

Bei diesen Blättern kann man im allgemeinen freie Verwölbung auch an der Blattwurzel voraussetzen. Legen wir auch hier zunächst konstanten Querschnitt zugrunde, so gelten die Gl. (14) bis (18) unverändert. Wir haben jedoch als Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{in } \xi = 0 \text{ ist } & \beta = 0 \text{ und } \beta'' = 0, \\ \text{in } \xi = 1 \text{ ist } & M = 0 \text{ und } \beta''' = 0. \end{aligned}$$

Die Systemdeterminante verschwindet, wenn

$$\cos c = 0, \quad c = \frac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \quad (24)$$

Dies ist aber wiederum die Eigenfrequenz der St. Venantschen Schwingung. Durch die im vorigen Abschnitt gemachte und als zulässig erkannte Näherung Gl. (18)

haben wir daher, wie man jetzt sieht, den Einfluß der Wölbbehinderung, soweit diese vom veränderlichen Drehmoment herrührt, außer Acht gelassen.

Wegen der gegenüber der Luftschraube bedeutend kleineren Winkelgeschwindigkeit können hier auch die Fliehkräfte vernachlässigt werden. Für den Drehflügel sind also die Drillschwingungsfrequenzen durch die $\bar{\nu}$ gegeben.

Zusammenfassung.

Der Einfluß der Wölbbehinderung und der Fliehkräfte auf die Drillschwingungsfrequenzen von Luftschrauben- und Drehflügelblättern wird untersucht. Es zeigt sich, daß dieser Einfluß bei Luftschraubenblättern nicht unbeträchtlich ist, bei Drehflügeln dagegen vernachlässigt werden kann.

(Eingegangen am 11. September 1946.)

Über die Bewegung einer kreisförmigen Scheibe auf reibender Unterlage.

Von F. Chmelka, Wien.

Mit 13 Textabbildungen.

1. Allgemeines über die Bewegung eines Körpers auf reibender Unterlage.

Ein scheibenförmiger Körper von der Masse m und zunächst beliebig gestalteter Grundfläche F habe zur Zeit $t = 0$ die Translationsgeschwindigkeit v_0 (Betrag v_0) und die Winkelgeschwindigkeit ω_0 . Er befinde sich auf einer ebenen, waagrechten, reibenden Unterlage und werde sich selbst überlassen. Welches ist der Bewegungsablauf, bis der Körper zur Ruhe kommt?

Wir nehmen an, der Normaldruck auf die Unterlage sei gleichmäßig verteilt, so daß also auf ein Flächenelement dF der Grundfläche eine Normalkraft $dN = \frac{mg}{F} dF$ wirkt. Dann ist die Größe des Reibungswiderstandes auf diesem Flächenelement, wenn f der Koeffizient der Gleitreibung ist,

$$dW = f dN = f \frac{mg}{F} dF = \kappa dF, \quad (1)$$

wenn

$$\kappa = \frac{f m g}{F} \quad (2)$$

bedeutet. Die Richtung von dW ist der Richtung der Geschwindigkeit des Flächenelements entgegengesetzt. Ist C das Momentanzentrum der Bewegung, so steht dW senkrecht auf der Verbindungslinie $C \dots dF$. Schwerpunktgeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t wollen wir mit v (Betrag v) und ω bezeichnen. ω ist positiv, wenn die Drehung des Körpers im Gegenzeigersinn, negativ, wenn sie im Uhrzeigersinn erfolgt. C liegt auf einer Senkrechten zum Vektor v durch den Schwerpunkt S im Abstand

$$a = \left| \frac{v}{\omega} \right| \quad (3)$$

von diesem, und zwar, in der Richtung von v gesehen, links vom Vektor v , wenn ω positiv, rechts, wenn ω negativ ist (Abb. 1). Sind die Koordinaten von S x , y , die von C x_C , y_C , so gilt

$$x_C = x - \frac{\dot{y}}{\omega}, \quad y_C = y + \frac{\dot{x}}{\omega}, \quad (4)$$

wo \dot{x} , \dot{y} die Komponenten von v bedeuten und ω mit seinem Vorzeichen einzusetzen ist.

Für die Bewegung des Körpers liefert zunächst der Schwerpunktssatz für die Richtung der Bahntangente T (positiv in der Richtung von v)

$$m \frac{dv}{dt} = \int_F dW_T, \quad (5)$$

und in der Richtung der Bahnnormalen N , wenn $\bar{\varrho}$ der Krümmungsradius der Bahn ist,

$$m \frac{v^2}{\bar{\varrho}} = \int_F dW_N. \quad (6)$$

Dabei ist N positiv nach der hohlen Seite der Bahn des Schwerpunkts gerichtet. dW_T und dW_N sind Tangential- und Normalkomponenten von dW . Ferner lautet der Momentensatz, wenn wir als Bezugspunkt das Momentanzentrum C wählen (s. z. B. Routh, Dynamik starrer Systeme, Bd. I, S. 113),

$$m [(x - x_C) \ddot{y} - (y - y_C) \ddot{x}] + J_S \dot{\omega} = M. \quad (7)$$

Darin ist J_S das Trägheitsmoment des Körpers um eine Achse durch S senkrecht zur Bahnebene und M das Drehmoment der äußeren Kräfte um den Punkt C . Der

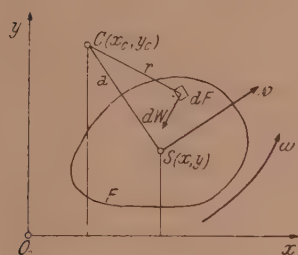


Abb. 1.

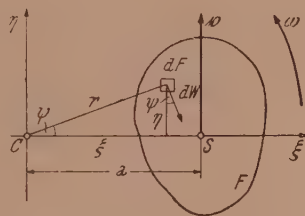


Abb. 2.

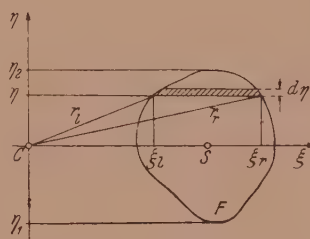


Abb. 3.

Drehsinn von M ist in unserem Fall immer entgegengesetzt dem von ω . Die Winkelgeschwindigkeit wird im Verlauf der von uns betrachteten Bewegung ihr Zeichen nicht ändern und wir wollen sie daher im folgenden stets als positiv voraussetzen. Dann ist

$$M = - \int_F r dW = - \int_F r dF. \quad (8)$$

Mit Hilfe von (4) folgt aus (7)

$$m (\dot{x} \ddot{x} + \dot{y} \ddot{y}) + J_S \omega \dot{\omega} = M \omega$$

oder

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{v^2}{2} + J_S \frac{\omega^2}{2} \right) = M \frac{d\varphi}{dt}. \quad (9)$$

Links in der Klammer steht die kinetische Energie des Körpers. Rechts bedeutet φ den Winkel, um den sich der Körper gegen eine feste Richtung gedreht hat. Die Gleichung besagt, daß die Änderung der kinetischen Energie pro Zeiteinheit gleich ist der in der Zeiteinheit von den Reibungskräften verbrauchten Arbeit.

Mit Hilfe von $v = a \omega$ und des Steinerschen Satzes kann man in (9) auch J_C , das Trägheitsmoment des Körpers um eine Achse durch C einführen. Nach Integration von $t = 0$ bis t hat man dann

$$J_C \frac{\omega^2}{2} - J_{C0} \frac{\omega_0^2}{2} = \int_0^t M d\varphi. \quad (10)$$

J_C wird im allgemeinen zeitlich veränderlich sein, J_{C0} bedeutet seinen Wert zur Zeit $t = 0$.

Zur Berechnung der Integrale in (5) und (6) machen wir C zum Ursprung eines ξ, η -Koordinatensystems (Abb. 2). Zunächst gilt für die Komponenten von dW

$$dW_T = -\kappa dF \cos \psi = -\kappa \frac{\xi d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

$$dW_N = \kappa dF \sin \psi = \kappa \frac{\eta d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

Die Integrale ergeben (s. Abb. 3 und 4)

$$\begin{aligned} \int_F dW_T &= -\kappa \int_F \frac{\xi d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = -\kappa \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} \sqrt{\xi_r^2 + \eta^2} d\eta - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sqrt{\xi_l^2 + \eta^2} d\eta \right) = \\ &= -\kappa \int_{\eta_1}^{\eta_2} (r_r - r_l) d\eta, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \pm \int_F dW_N &= \kappa \int_F \frac{\eta d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \kappa \left(\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{\xi^2 + \eta_o^2} d\xi - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{\xi^2 + \eta_u^2} d\xi \right) = \\ &= \kappa \int_{\xi_1}^{\xi_2} (r_o - r_u) d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

Das letzte Integral in (12) verschwindet, wenn die ξ -Achse eine Symmetrieachse der Fläche F ist. Für eine Kreisfläche ist es dauernd Null. Der Schwerpunkt einer kreisförmigen Scheibe wird sich demnach geradlinig in der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit

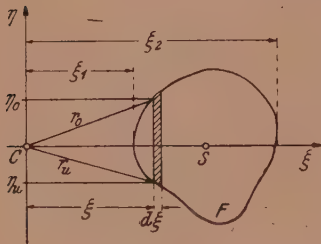


Abb. 4.

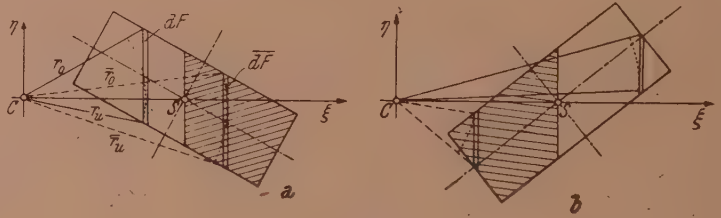


Abb. 5.

keit v_0 bis zum Stillstand der Scheibe fortbewegen. Dies ist jedoch nicht immer so. Beim Rechteck z. B. ist für den Fall der Abb. 5a das Integral (12) sicher positiv. Teilen wir das Rechteck in die schraffierte und die unschraffierte Hälfte, so liefert die linke zum Integral einen positiven Beitrag, da für sie durchwegs $r_o - r_u > 0$ ist, die rechte Hälfte einen negativen Beitrag. Dieser ist jedoch dem Betrage nach kleiner als der positive. Denn für den Flächenstreifen dF der linken Hälfte ist $r_o - r_u$ größer als der Betrag dieser Differenz für den gleichgroßen Flächenstreifen $d\bar{F}$ der rechten Hälfte, der zu dF in bezug auf S symmetrisch liegt.

Dreht sich das Rechteck weiter, so daß C relativ zu ihm in die in Abb. 5b dargestellte Lage kommt, so ist das Integral negativ. Für die Symmetrieachsen des Rechtecks ist es Null.

Beim Rechteck hat also die Resultierende der Reibungskräfte in der Richtung senkrecht zu v im allgemeinen eine von Null verschiedene Komponente, die nicht sehr groß ist und die während der Drehung des Körpers ihren Richtungssinn wechselt. Der Schwerpunkt wird daher in diesem Fall keine gerade Bahn beschreiben.

2. Die Bewegung einer kreisförmigen Scheibe.

Wir wollen im folgenden unsere Betrachtungen auf eine kreisförmige Scheibe mit dem Radius R beschränken. Für eine solche ist also das Integral (12) dauernd Null. Das Integral (11) können wir in zwei Teile zerlegen und schreiben

$$I = \int_{\eta_1}^{\eta_2} r_r d\eta - \int_{\eta_1}^{\eta_2} r_l d\eta = I_1 - I_2. \quad (13)$$

Nun gilt nach Abb. 6

$$r_r = \sqrt{\eta^2 + (a + R \cos \alpha)^2}, \quad r_l = \sqrt{\eta^2 + (a - R \cos \alpha)^2}.$$

Führen wir für $\eta = R \sin \alpha$, $d\eta = R \cos \alpha d\alpha$ ein, so erhalten wir

$$I = 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 + R^2 + 2aR \cos \alpha} \cos \alpha d\alpha - \\ - 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \alpha} \cos \alpha d\alpha. \quad (14)$$

Sodann ist noch das Integral (8) zu berechnen. Wir setzen

$$I_3 = \int_F r dF. \quad (15)$$

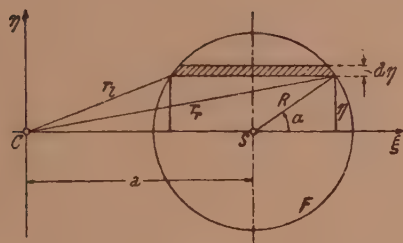


Abb. 6.

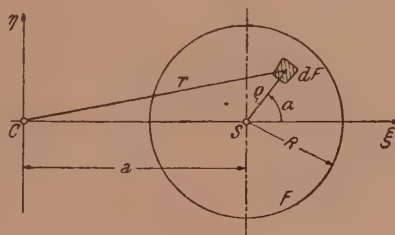


Abb. 7.

Darin ist (s. Abb. 7)

$$r = \sqrt{a^2 + \varrho^2 + 2a\varrho \cos \alpha}, \quad dF = \varrho d\varrho d\alpha,$$

also

$$I_3 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + \varrho^2 + 2a\varrho \cos \alpha} \varrho d\varrho d\alpha. \quad (16)$$

Die Integrale I_1 , I_2 sowie das Integral über α in I_3 , das wir mit \bar{I}_3 bezeichnen wollen, sind elliptische Integrale, bzw. lassen sich auf solche zurückführen. Betrachten wir zunächst das Integral

$$\bar{I}_3 = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + \varrho^2 + 2a\varrho \cos \alpha} d\alpha. \quad (17)$$

Ergänzen wir unter der Wurzel zu einem Quadrat, so erhalten wir

$$a^2 + \varrho^2 + 2a\varrho \cos \alpha = (a + \varrho)^2 - 2a\varrho(1 - \cos \alpha) = \\ = (a + \varrho)^2 - 4a\varrho \sin^2 \frac{\alpha}{2} = (a + \varrho)^2 \left(1 - \frac{4a\varrho}{(a + \varrho)^2} \sin^2 \varphi\right),$$

wenn wir für $\alpha/2 = \varphi$ einführen. Es ist dann $d\alpha = 2d\varphi$ und die Integrationsgrenzen verwandeln sich in 0 und π . Mithin ist

$$\bar{I}_3 = 2(a + \varrho) \int_0^\pi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad k^2 = \frac{4a\varrho}{(a + \varrho)^2}. \quad (18)$$

Es läßt sich nun sofort zeigen, daß $k^2 < 1$ ist, wenn $a \neq \varrho$ ist. Denn stellen wir die Ungleichung auf

$$(a + \varrho)^2 > 4a\varrho,$$

so bedeutet dies

$$a^2 - 2a\varrho + \varrho^2 = (a - \varrho)^2 > 0,$$

was für $a \neq \varrho$ erfüllt ist. Für $a = \varrho$ ist $k^2 = 1$.

Nun ist

$$\int_0^\pi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 2E(k),$$

wo $E(k)$ das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung ist:

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (19)$$

Also ist

$$\overline{I}_3 = 4(a + \varrho) E(k), \quad k = \frac{4a\varrho}{(a + \varrho)^2}, \quad (20)$$

und nach (16) gilt

$$I_3 = 4 \int_0^R (a + \varrho) E(k) \varrho d\varrho. \quad (21)$$

Ganz ähnliche Umformungen machen wir mit den Integralen I_1 und I_2 der Gl. (13), für die nach (14) gilt

$$\left. \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\} = 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 + R^2 \pm 2aR \cos \alpha} \cos \alpha d\alpha. \quad (22)$$

Wir können schreiben

$$a^2 + R^2 + 2aR \cos \alpha = (a + R)^2 - 2aR(1 - \cos \alpha) = (a + R)^2 \left(1 - \frac{4aR}{(a + R)^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$a^2 + R^2 - 2aR \cos \alpha = (a + R)^2 - 2aR(1 + \cos \alpha) = (a + R)^2 \left(1 - \frac{4aR}{(a + R)^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right).$$

Setzen wir in dem Ausdruck für I_1 für $\alpha/2 = \varphi$, so ist außerhalb der Wurzel $\cos \alpha = \cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2 \varphi$; die Integrationsgrenzen ändern sich in 0, $\pi/4$ und es ergibt sich

$$I_1 = 4R(a + R) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} (1 - 2\sin^2 \varphi) d\varphi, \quad k^2 = \frac{4aR}{(a + R)^2},$$

mit $k^2 < 1$ für $a \neq R$ und $k^2 = 1$ für $a = R$.

In I_2 setzen wir für $\alpha/2 = \bar{\varphi}$ und schreiben für $\cos \alpha = \cos 2\bar{\varphi} = -1 + 2\cos^2 \bar{\varphi}$. Dann haben wir

$$I_2 = -4R(a + R) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \bar{\varphi}} (1 - 2\cos^2 \bar{\varphi}) d\bar{\varphi}.$$

Setzen wir nun für $\bar{\varphi} = \pi/2 - \varphi$, so ist $d\bar{\varphi} = -d\varphi$ und die Grenzen ändern sich in $\pi/2$, $\pi/4$; wir vertauschen sie und schreiben

$$I_2 = -4R(a + R) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} (1 - 2\sin^2 \varphi) d\varphi.$$

Für das Integral I der Gl. (13) ergibt sich dann

$$I = 4R(a + R) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \sin^2 \varphi d\varphi \right). \quad (23)$$

Das erste Integral ist gleich $E(k)$. Für das zweite gilt [s. z. B. Integraltafel von Gröbner, Hofreiter usw., S. 66, Gl. (13k)]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1 - k^2}{3 k^2} K(k) - \frac{1 - 2 k^2}{3 k^2} E(k), \quad (24)$$

wo $K(k)$ das vollständige elliptische Integral erster Gattung ist:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (25)$$

Damit erhalten wir

$$I = \frac{4 R (a + R)}{3 k^2} [(2 - k^2) E(k) - 2 (1 - k^2) K(k)], \quad k^2 = \frac{4 a R}{(a + R)^2}. \quad (26)$$

3. Die Integrale I und I_3 als Funktionen von a .

Bevor wir den gesamten Verlauf der Integrale I und I_3 als Funktionen von a darstellen, verschaffen wir uns einige Anhaltspunkte über denselben durch Betrachtung einiger Sonderfälle.

Setzen wir zunächst voraus, daß $a \gg R$ sei. Dann ist auch $a \gg \varrho$ und sowohl in (20) als auch in (26) ist $k^2 \ll 1$. Wir können dann in (19) und (25) den Integranden nach der binomischen Reihe entwickeln und erhalten (s. auch Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 3. Aufl., S. 73)

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 - 2 \frac{k^2}{8} - 3 \left(\frac{k^2}{8} \right)^2 - \dots \right], \quad (27)$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 + 2 \frac{k^2}{8} + 9 \left(\frac{k^2}{8} \right)^2 + \dots \right]. \quad (28)$$

Setzen wir diese Werte in (26) ein und berücksichtigen im Endergebnis nur Glieder, die höchstens k^2 enthalten, so ergibt sich

$$I = \frac{\pi a R^2}{a + R}, \quad (29)$$

oder, weil $a \gg R$ ist,

$$I = F \left(1 - \frac{R}{a} \right), \quad (30)$$

wo $F = \pi R^2$ die Kreisfläche bedeutet. Für sehr großes a nähert sich I asymptotisch dem Wert F , was gemäß der Bedeutung dieses Integrals ohne weiteres einleuchtet.

Für \bar{I}_3 erhalten wir, wenn wir (27) in (20) einsetzen und wieder nach dem Glied mit k^2 abbrechen,

$$\bar{I}_3 = 2 \pi (a + \varrho) \left(1 - \frac{a \varrho}{(a + \varrho)^2} \right),$$

oder, wegen $a \gg \varrho$,

$$\bar{I}_3 = 2 \pi a \left(1 + \frac{\varrho^2}{a^2} \right).$$

Gemäß (16) ist

$$I_3 = \int_0^R \bar{I}_3 \varrho \, d\varrho, \quad (31)$$

was

$$I_3 = F a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{a^2} \right) \quad (32)$$

liefert. Für sehr großes a nähert sich also I_3 asymptotisch dem Wert $F a$, was ebenfalls einleuchtet.

Wir wollen nun noch I für den Fall berechnen, daß $a = R$ ist und hernach für $a \ll R$. Für $a = R$ ist in (23) $k^2 = 1$ und wir erhalten

$$I = 8 R^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \right) = \frac{8}{3} R^2 = 2.67 R^2. \quad (33)$$

Für $a \ll R$ ist wieder $k^2 \ll 1$ und es ergibt sich zunächst wieder der Ausdruck (29), für den wir aber jetzt schreiben können

$$I = \pi a R \left(1 - \frac{a}{R}\right). \quad (34)$$

Für $a = 0$ ist also $I = 0$, wie es ja aus Symmetriegründen sein muß. Für sehr kleines a steigt I zunächst näherungsweise linear mit a an.

Berechnet man nun nach (26) für verschiedene Werte von a den Wert von I (s. Tab. 1), so erhält man das in Abb. 8 dargestellte Schaubild.

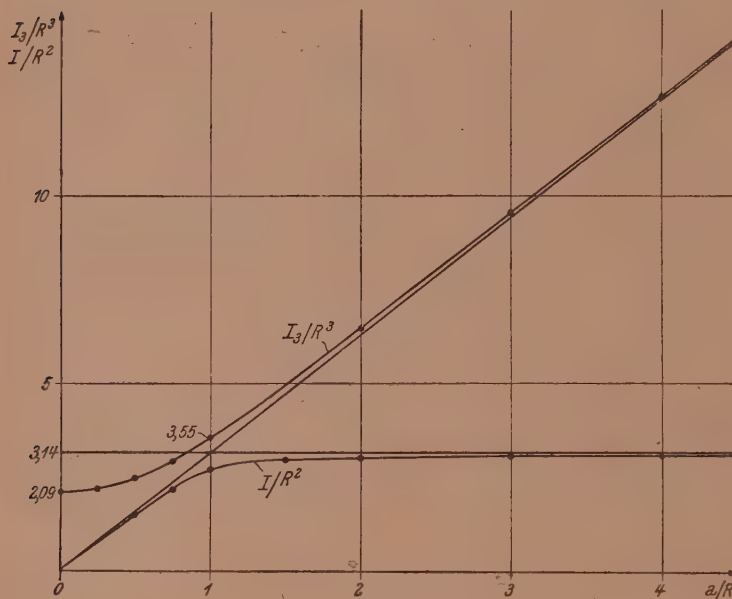


Abb. 8.

Tabelle 1.

a/R	I/R^2	I_3/R^3
0	0.00	2.09
$1/4$	—	2.19
$1/2$	1.52	2.46
$3/4$	2.18	2.94
1	2.67	3.55
$3/2$	2.96	—
2	3.04	6.48
3	3.08	9.55
4	3.12	12.66

Wir trachten nun ein ähnliches Schaubild für die Funktion I_3 von a zu erhalten. Zunächst ist für $a = 0$ $k^2 = 0$ und nach (18)

$$\bar{I}_3 = 2 \pi \varrho,$$

womit nach (31)

$$I_3 = \frac{2}{3} \pi R^3 = 2.09 R^3 \quad (35)$$

folgt [was man auch unschwer direkt nach (15) berechnen kann]. Um nun I_3 als Funktion von a zu berechnen, hätte man in (21) ϱ durch k auszudrücken und zu integrieren. Da dies jedoch auf sehr unhandliche Ausdrücke führt, wurde das Integral (21) für verschiedene Werte von a nach der Simpsonschen Formel berechnet. Die Ergebnisse zeigt Tab. 1 sowie Abb. 8.

4. Näherungslösung der Aufgabe.

Bei Betrachtung der Abb. 8 sehen wir, daß wir etwa im Bereich $a \geq 2 R$ mit guter Näherung

$$I = F \quad (36)$$

setzen können, in größerer Näherung können wir dies auch bis $a = R$ gelten lassen.

Im Bereich $0 \leq a \leq R$ gilt mit guter Näherung von $a = 0$ bis etwa $a = \frac{3}{4} R$

$$I = \pi a R, \quad (37)$$

in größerer Näherung können wir diese Gerade auch bis $a = R$ als gültig betrachten.

I_3 können wir im Bereich $a \geq 2 R$ mit guter Näherung durch die Gerade

$$I_3 = F a \quad (38)$$

[s. (32)] ersetzen, in größerer Näherung lassen wir dies auch bis $a = R$ gelten. Im Bereich $0 \leq a \leq R$ wollen wir I_3 durch eine Parabel durch den Punkt $a = R$,

$I_3 = 3.55 R^3$, mit dem Scheitel im Punkt $a = 0$, $I_3 = 2.09 R^3$ ersetzen. Schreiben wir

$$I_3 = A a^2 + B, \quad (39)$$

so ergibt sich

$$A = 1.46 R, \quad B = \frac{2}{3} \pi R^3 = 2.09 R^3. \quad (40)$$

Wir sehen also, daß es im wesentlichen zwei Typen der Bewegung des Körpers gibt, je nachdem a größer oder kleiner als R ist, und daß diese beiden Bewegungsarten im Gebiet $a \approx R$ ineinander übergehen.

Betrachten wir zunächst den Fall, daß $a > R$ ist. Die Bewegungsgleichungen waren die Gl. (5) und (9). Schreiben wir in der ersten für

$$\int_F dW_T = P,$$

so haben wir

$$m \dot{v} = P. \quad (41)$$

In (9) differenzieren wir links aus und haben

$$m v \dot{v} + J_S \omega \dot{\omega} = M \omega. \quad (42)$$

Nach (11) und (13), ferner nach unserer Näherung (36) gilt

$$P = -\kappa I = -\kappa F.$$

Nach (8) und (15), ferner nach unserer Näherung (38) gilt

$$M = -\kappa I_3 = -\kappa F a.$$

Dabei ist nach (2) $\kappa = \frac{fmg}{F}$.

Damit lauten die Bewegungsgleichungen

$$m \dot{v} = -\kappa F, \quad (43)$$

$$m v \dot{v} + J_S \omega \dot{\omega} = -\kappa F a \omega. \quad (44)$$

Aus der ersten folgt, wenn v_0 die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ ist,

$$v = -f g t + v_0. \quad (45)$$

Aus der zweiten folgt, wenn wir für \dot{v} den Wert aus der ersten einsetzen und beachten, daß nach (3) $a = v/\omega$ ist (die Absolutstriche können wegbleiben, da wir $\omega > 0$ vorausgesetzt haben),

$$J_S \omega \dot{\omega} = 0,$$

also

$$\omega = \text{const.} = \omega_0, \quad (46)$$

wenn ω_0 die Winkelgeschwindigkeit am Anfang der Bewegung bedeutet. Für den Abstand des Momentanzentrums C vom Schwerpunkt S der Scheibe ergibt sich

$$a = -\frac{f g}{\omega_0} t + a_0, \quad (47)$$

wenn $a_0 = v_0/\omega_0$ der Abstand zu Beginn der Bewegung ist. Ist also am Anfang der Bewegung a groß gegenüber R , so nimmt v mit guter Näherung linear mit der Zeit ab, während ω fast konstant bleibt. Infolgedessen nimmt a ebenfalls linear mit der Zeit ab, C rückt also immer näher an S heran und unsere Voraussetzungen für die Gültigkeit der Lösung werden immer weniger gut erfüllt.

Daß ω für großes a näherungsweise konstant bleibt, ist leicht einzusehen. Liegt C im Vergleich zum Scheibenradius weitab von S , so sind die Reibungskräfte dW annähernd parallel und ihr resultierendes Moment um den Schwerpunkt der Scheibe ist nahezu Null. Daher wird ω nur wenig beeinflusst.

Wir behandeln jetzt den Fall, daß $a < R$ ist. Nach unseren Näherungen (37) und (39) ist jetzt

$$P = -\kappa \pi R a, \quad M = -\kappa (A a^2 + B),$$

worin für A und B die Gl. (40) gelten. Die Bewegungsgleichungen lauten also jetzt

$$m \dot{v} = -\kappa \pi R a, \quad (48)$$

$$m v \dot{v} + J_S \omega \dot{\omega} = -\kappa (A a^2 + B) \omega. \quad (49)$$

Untersuchen wir zunächst den Fall $\dot{v} = 0$. Dann ist nach (48) $a = 0$ und wegen $a = v/\omega$ folgt $v = 0$. Es ist dies der Fall der reinen Drehung. Aus (49) ergibt sich dann

$$\omega = -\frac{2}{3} \frac{f g R}{J_S} t + \omega_0, \quad (50)$$

oder mit $J_S = \frac{1}{2} m R^2$ als Trägheitsmoment einer zylindrischen Kreisscheibe

$$\omega = -\frac{4}{3} \frac{f g}{R} t + \omega_0. \quad (51)$$

Die Rotationsbewegung erfolgt also gleichförmig verzögert.

Setzen wir jetzt $\dot{v} \neq 0$ voraus (damit ist also auch $v \neq 0$), so können wir aus (48) ω und daraus ω berechnen:

$$\omega = -\frac{f g}{R} \frac{v}{\dot{v}}, \quad (52)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{f g}{R} \left(1 - \frac{v \ddot{v}}{v^2}\right).$$

Damit können wir aus (49) ω und $\dot{\omega}$ eliminieren und erhalten eine Differentialgleichung für v

$$m \left(1 - \frac{A}{\pi R}\right) \dot{v}^4 + \left(\frac{f g}{R}\right)^2 \left(J_S - \frac{m}{\pi R} B\right) \dot{v}^2 - J_S \left(\frac{f g}{R}\right)^2 v \ddot{v} = 0. \quad (53)$$

Wir schreiben zur Abkürzung

$$A_1 \dot{v}^4 + A_2 \dot{v}^2 - A_3 v \ddot{v} = 0. \quad (54)$$

Führen wir für A und B ihre Werte aus (40) ein und für $J_S = \frac{1}{2} m R^2$, so ergibt sich

$$A_1 = 0.465 m \approx \frac{1}{2} m, \quad A_2 = -\frac{1}{6} f^2 g^2 m, \quad A_3 = -3 A_2.$$

Dividieren wir (54) durch A_1 und setzen

$$\frac{f^2 g^2}{3} = c^2, \quad (55)$$

so lautet die Differentialgleichung für v

$$\dot{v}^4 - c^2 \dot{v}^2 = 3 c^2 v \ddot{v}. \quad (56)$$

Wir können sofort einige Lösungen dieser Gleichung angeben. Zunächst ist $v = \text{const}$ eine solche. Dann ist $\dot{v} = 0$ und nach dem Obigen $v = 0$. Diesen Fall haben wir schon behandelt.

Sodann kann $\dot{v} \neq 0$, jedoch $\ddot{v} = 0$ sein. (56) reduziert sich dann auf

$$\dot{v}^2 - c^2 = 0,$$

also

$$\dot{v} = \pm c.$$

v kann niemals positiv sein, da die Geschwindigkeit nur abnehmen kann. Wir erhalten also

$$v = -\frac{f g}{\sqrt{3}} t + v_0. \quad (57)$$

Damit folgt aus (52)

$$\omega = -\frac{f g}{R} t + \frac{\sqrt{3}}{R} v_0. \quad (58)$$

Berechnen wir aus diesen Formeln a , so ergibt sich

$$a = \frac{R}{\sqrt{3}}. \quad (59)$$

a ist also zeitlich konstant. Dies folgt ja schon aus (48), denn nur für zeitlich unabhängiges a ist v eine lineare Funktion von t . ω geht also proportional mit v auf Null herunter. Jedoch ist zu beachten, daß dies nicht für jedes beliebige Verhältnis von v_0/ω_0 gilt, sondern nur dann, wenn dieses gleich $R/\sqrt{3}$ ist, wenn also zu Beginn der Bewegung

$$a_0 = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{R}{\sqrt{3}} \quad (60)$$

ist. In diesem Fall ist also der Bewegungsablauf denkbar einfachst; er ist in Abb. 9 dargestellt.

Wie geht nun die Bewegung vor sich, wenn a_0 einen anderen als den obigen Wert besitzt? Dazu müssen wir nach weiteren Lösungen von (56) suchen. Wir können unschwer ein erstes Integral dieser Gleichung finden, wenn wir $\dot{v} = b$ setzen und b als Funktion von v auffassen:

$$\dot{v} = b(v).$$

b ist die Beschleunigung, die in unserem Fall stets negativ ist. Es gilt dann

$$\ddot{v} = \frac{db}{dt} = \frac{db}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{db}{dv} b.$$

Damit ergibt (56)

$$b(b^2 - c^2) = 3c^2 v \frac{db}{dv},$$

woraus folgt

$$\frac{1}{3c^2} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_{b_0}^b \frac{db}{b(b^2 - c^2)}. \quad (61)$$

Führen wir rechts Partialbruchzerlegung durch, so ergibt sich

$$\frac{1}{b(b^2 - c^2)} = -\frac{1}{c^2} \frac{1}{b} + \frac{1}{2c^2} \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2c^2} \frac{1}{b-c}.$$

Bezeichnet b_0 den Wert von b zur Zeit $t = 0$, so liefert (61)

$$\frac{1}{3} \log \frac{v}{v_0} = -\log \frac{b}{b_0} + \frac{1}{2} \log \frac{b+c}{b_0+c} + \frac{1}{2} \log \frac{b-c}{b_0-c},$$

oder

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{b}{b_0}\right)^2 = \frac{b^2 - c^2}{b_0^2 - c^2}. \quad (62)$$

b_0 folgt aus (48), wenn wir für a den Wert $a_0 = v_0/\omega_0$ einsetzen:

$$b_0 = -\frac{fg}{R} a_0 = -\frac{fg}{R} \frac{v_0}{\omega_0}; \quad (63)$$

für c^2 gilt (55).

Aus (62) können wir b berechnen und erhalten, wenn wir bedenken, daß b negativ sein muß,

$$b = -\frac{c}{\sqrt{1 - n \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{2}{3}}}}. \quad (64)$$

Darin ist $c = fg/\sqrt{3}$ und n eine Abkürzung für

$$n = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{R}{a_0}\right)^2. \quad (65)$$

Diskutieren wir nun den Verlauf der Funktion $b = b(v)$ für verschiedene Werte von a_0 . Ist $R/\sqrt{3} < a_0 \leq R$, so ist $0 < n < 1$. Da $v/v_0 \leq 1$ ist, so ist der Radikand

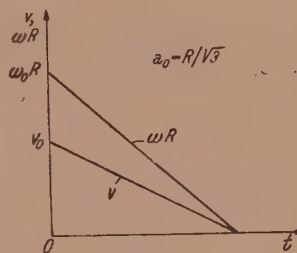


Abb. 9.

der Wurzel in (64) stets positiv. Er wird mit abnehmendem v größer, für $v = 0$ ist er gleich 1. b nimmt also dem Betrage nach dauernd ab, bis der Betrag am Ende der Bewegung auf den Wert c gesunken ist.

Für $a_0 = R/\sqrt{3}$, also für den vorhin behandelten Sonderfall, ist $n = 0$ und $b = -c$, also konstant während des ganzen Ablaufs der Bewegung [s. (57)].

Für $0 < a_0 < R/\sqrt{3}$ ist $n < 0$ und der Radikand der Wurzel in (64) nimmt mit abnehmendem v ab bis auf den Wert 1 für $v = 0$. b nimmt also dem Betrage nach zu, bis der Betrag am Ende der Bewegung wieder den Wert c erreicht.

In Tab. 2 sind für $c^2 = 2 \text{ m}^2/\text{sec}^4$, also $c = 1.41 \text{ m/sec}^2$, was einem Reibungskoeffizienten $f = 0.25$ entspricht, für einige Werte von a_0 die Werte von b berechnet, die sich aus (64) ergeben, wenn v vom v_0 auf Null abnimmt ($g = 9.81 \text{ m/sec}^2$). Abb. 10 zeigt die entsprechenden Kurven. Wie man durch Bildung von db/dv feststellt, erfolgt die Einmündung der Kurven in den Punkt $v = 0$, $b = -c$ stets mit lotrechter Tangente (außer im Fall $a_0 = R/\sqrt{3}$).

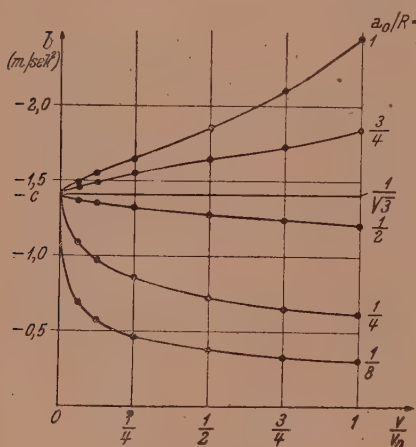


Abb. 10.

Tabelle 2.

v/v_0	Werte von $-b$ in m/sec^2 , wenn $a_0/R =$					
	1	$\frac{3}{4}$	$1/\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$1/8$
1	2.45	1.84	1.41	1.23	0.612	0.306
$3/4$	2.11	1.73	1.41	1.25	0.661	0.336
$1/2$	1.86	1.64	1.41	1.28	0.731	0.381
$1/4$	1.65	1.55	1.41	1.33	0.875	0.470
$1/8$	1.55	1.49	1.41	1.36	0.981	0.573
$1/16$	1.49	1.46	1.41	1.38	1.090	0.690

Nach (48) ist a proportional b , und zwar ist

$$a = -\frac{R}{c\sqrt{3}} b. \quad (66)$$

Die Kurven der Abb. 10 geben also, wenn wir die Ordinaten mit dem konstanten Faktor

$-R/c\sqrt{3}$ multiplizieren, den Verlauf von a als Funktion von v an. Für sämtliche $a_0 \neq 0$ ist also am Ende der Bewegung, wegen $b = -c$, $a = R/\sqrt{3}$. Einzig der Fall $a_0 = 0$, der schon behandelte Fall der reinen Drehung, bildet eine Ausnahme. Hier ist und bleibt $a = 0$.

Wir kommen also zu folgendem Ergebnis: Für sämtliche a_0 , für die gilt $0 < a_0 \leq R$, nähert sich die Bewegung gegen Ende immer mehr der in Abb. 9 dargestellten, wo v und ω im selben Verhältnis abnahmen. Da stets $a \neq 0$ ist und $\omega = v/a$ ist, so erreichen v und ω gleichzeitig den Wert Null. Ist zu Beginn der Bewegung $a_0 > R/\sqrt{3}$, so nimmt v rascher ab als ω (ω wartet gewissermaßen auf v) und a nimmt bis auf $R/\sqrt{3}$ ab. Ist $a_0 < R/\sqrt{3}$, so nimmt ω rascher ab als v (v wartet auf ω) und a nimmt bis auf $R/\sqrt{3}$ zu. Ist $a_0 = R/\sqrt{3}$, so nehmen v und ω im selben Verhältnis ab und a bleibt konstant.

Es fragt sich nun, wieso es zu der Ausnahmestellung des Falles $a_0 = 0$ kommt, wo während der ganzen Bewegung $a = 0$ bleibt, während, wenn a_0 nur ganz wenig von Null verschieden ist, also v_0 nur einen ganz kleinen Wert hat, a auf den Wert $R/\sqrt{3}$ ansteigt. Ist a_0 sehr klein, so stehen die Reibungskräfte fast senkrecht auf den Radien des Kreises, ihre Resultierende ist also fast Null und die Kräfte haben lediglich ein resultierendes Moment. Infolgedessen wird sich zunächst nur ω verringern, während

v so gut wie konstant bleibt, und a wächst also an. Erst wenn a genügend groß, also ω genügend klein geworden ist, beginnt auch v merklich abzunehmen.

Nachdem wir nun b als Funktion von v besitzen, trachten wir v als Funktion von t zu gewinnen. Aus

$$\frac{dv}{dt} = b(v)$$

folgt

$$t = \int_{v_0}^v \frac{dv}{b(v)}. \quad (67)$$

Damit haben wir $t = t(v)$, woraus nach Umkehrung $v = v(t)$ folgt. Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden:

1.) $R/\sqrt{3} < a_0 < R$. Dann ist in (64) $n > 0$. Wir setzen

$$z = n \left(\frac{v}{v_0} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Dann ist

$$dv = \frac{3 v_0}{2 n \sqrt{n}} \sqrt{z} dz.$$

(64) in (67) eingesetzt, die Grenzen geändert und vertauscht, liefert dann

$$t = \frac{3 v_0}{2 c n \sqrt{n}} \int_z^n \sqrt{z - z^2} dz.$$

Daraus erhalten wir (bezüglich dieses und des folgenden Integrals s. z. B. Naske, Integraltafeln, S. 13)

$$t = \frac{3 v_0}{2 c n \sqrt{n}} \left[\frac{2n-1}{4} \sqrt{n-n^2} - \frac{2z-1}{4} \sqrt{z-z^2} - \frac{1}{8} \arcsin(1-2n) + \frac{1}{8} \arcsin(1-2z) \right], \quad z = n \left(\frac{v}{v_0} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (68)$$

2.) $0 < a_0 < R/\sqrt{3}$. Dann ist in (64) $n < 0$. Wir setzen in diesem Fall

$$z = |n| \left(\frac{v}{v_0} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Dann ist

$$dv = \frac{3 v_0}{2 |n| \sqrt{|n|}} \sqrt{z} dz$$

und (67) lautet

$$t = \frac{3 v_0}{2 c |n| \sqrt{|n|}} \int_z^n \sqrt{z + z^2} dz.$$

Wir erhalten dann

$$t = \frac{3 v_0}{2 c |n| \sqrt{|n|}} \left[\frac{2|n|+1}{4} \sqrt{|n|+n^2} - \frac{2z+1}{4} \sqrt{z+z^2} - \frac{1}{8} \log \operatorname{nat} \left(\frac{1}{2} + |n| + \sqrt{|n|+n^2} \right) - \frac{1}{8} \log \operatorname{nat} \left(\frac{1}{2} + z + \sqrt{z+z^2} \right) \right],$$

$$z = |n| \left(\frac{v}{v_0} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (69)$$

Setzen wir in (68) und (69) der Reihe nach verschiedene Werte für v ein, rechnen t aus und tragen die Ergebnisse in einem Schaubild auf, so erhalten wir eine Kurve, die v als Funktion von t darstellt. [Fast schneller kommt man zum Ziel, wenn man (67) nach der Simpsonschen Formel berechnet.] Tab. 3 zeigt die Ergebnisse für

$v_0 = 1$ m/sec, $f = 0.25$ ($c = \sqrt{2}$) und $a_0 = R$ bzw. $a_0 = R/4$. Die entsprechenden Schaubilder zeigen die Abb. 11 und 12. Hat v_0 irgendeinen anderen Wert, so sind nach (68) und (69) die Zeiten v_0 mal so groß, während auf der Ordinatenachse statt 1, $\frac{3}{4}$ usw., v_0 , $\frac{3}{4} v_0$ usw. zu schreiben ist.

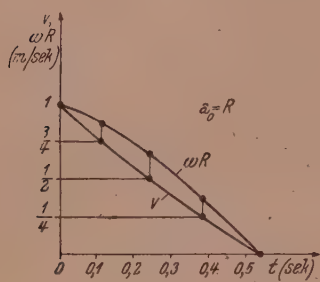


Abb. 11.

Tabelle 3.

v	$a_0/R = 1$		$a_0/R = \frac{1}{4}$	
	t sec	ωR m/sec	t sec	ωR m/sec
1	0.00	1.00	0.00	4.00
$\frac{3}{4}$	0.11	0.87	0.41	2.78
$\frac{1}{2}$	0.24	0.66	0.75	1.68
$\frac{1}{4}$	0.38	0.37	1.07	0.71
$\frac{1}{8}$	—	—	1.21	0.32
0	0.54	0.00	1.32	0.00

Zu den Werten für i in Tab. 3 erhalten wir nun sogleich die zugehörigen ω -Werte. Nach (52) ist ja

$$\omega = -\frac{f g}{R} \frac{v}{b}.$$

In unserem Falle, mit $f = 0.25$, ist

$$\omega R = -2.45 \frac{v}{b}. \quad (70)$$

b ist für das betreffende v

aus (64) zu berechnen (s. Tab. 2). So ergibt sich z. B. im Falle $a_0 = R$ und $v_0 = 1$ für $t = 0$ $\omega R = 1$. Für $t = 0.11$ ist für v der zugehörige Wert $v = \frac{3}{4}$ in (70) einzusetzen; der zu $v = \frac{3}{4}$ gehörige Wert von b ist laut Tab. 2 gleich -2.11 . Für $t = 0.11$ ist demnach

$$\omega R = 2.45 \frac{0.75}{2.11} = 0.87 \text{ m/sec.}$$

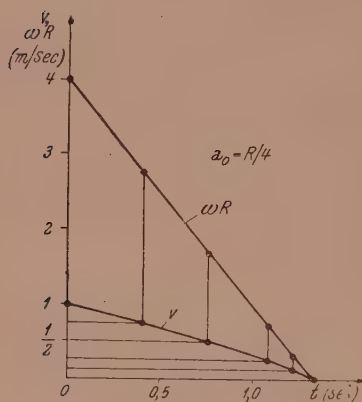


Abb. 12.

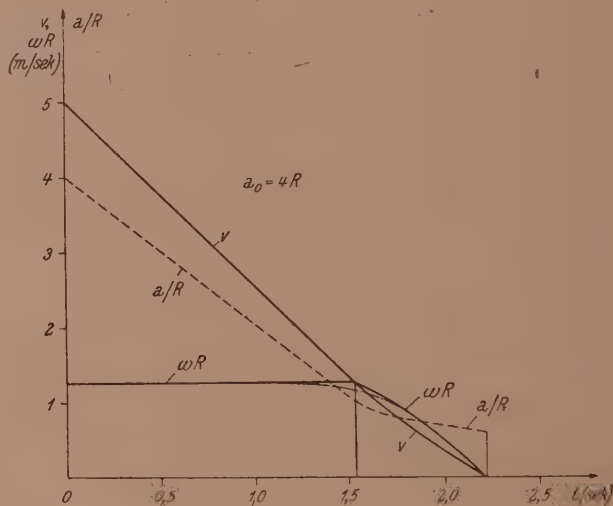


Abb. 13.

So ergeben sich die in Tab. 3 eingetragenen Werte für ωR . Die entsprechenden Kurven zeigen die Abb. 11 und 12.

In Abb. 11 sehen wir deutlich, daß hier, wo $a_0 > R/\sqrt{3}$ ist, v zunächst rascher abnimmt als ω . In Abb. 12 ist wegen $a_0 = R/4$ $\omega_0 R = 4 v_0 = 4$ m/sec. ω geht hier fast linear auf Null herunter (schon ziemlich ähnlich dem Fall $a_0 = 0$), während die Kurve $v = v(t)$ nach oben gekrümmt ist. ω nimmt also rascher ab als v . Der Wert $a = R/\sqrt{3}$ wird hier erst sehr spät erreicht, entsprechend dem späten und steilen Anstieg der Kurve $b = b(v)$ auf den Wert $-c$.

Wie sieht nun unsere Näherungslösung in dem Fall aus, daß a_0 einen Wert hat, der weitaus größer ist als R und wie verläuft die Bewegung bis zum Stillstand des Körpers? Betrachten wir etwa den Fall, daß $a_0 = 4R$ und $v_0 = 5$ m/sec, also $\omega_0 R = 5/4 = 1.25$ m/sec ist. Wieder sei $f = 0.25$.

Zunächst, in der ersten Phase der Bewegung, gelten die Gl. (45) und (46):

$$v = -fgt + v_0 = -2.45t + 5,$$

$$\omega R = \omega_0 R = 1.25.$$

v nimmt also linear ab und ω bleibt konstant. Sehen wir diese Formeln in etwas gröberer Näherung bis $a = R$ als gültig an, so ergibt sich das in Abb. 13 gezeichnete Bild. Nach

$$t = \frac{5 - 1.25}{2.45} = 1.53 \text{ sec}$$

ist v auf den Wert 1.25 gesunken und damit $a = R$ und die erste Phase der Bewegung beendet. Die Bewegung tritt jetzt mit $\bar{v}_0 = 1.25$, $\bar{a}_0 = R$ in ihr zweites Stadium, das der Abb. 11 entspricht, wobei nur alle Abszissen und Ordinaten mit 1.25 zu multiplizieren sind. Nach $t_2 = 1.25 \cdot 0.54 = 0.68 \text{ sec}$ ist auch die zweite Phase durchlaufen und der Körper kommt somit nach insgesamt

$$t_0 = t_1 + t_2 = 1.53 + 0.68 = 2.21 \approx 2.2 \text{ sec}$$

zur Ruhe.

Der Anschluß der in den beiden Gebieten $a > R$ und $a < R$ gültigen Kurven erfolgt bei $a = R$ glatter, als man vielleicht erwarten würde. Die Kurven für v stoßen fast ohne Knick zusammen. In die Abbildung ist auch der Verlauf von a als Funktion von t eingezeichnet. Wir können darnach im Bereiche von $\frac{3}{4}R \leq a \leq 2R$ die ωR -Kurve etwa nach der strichpunktierten Kurve ausrunden, die den tatsächlich herrschenden Verhältnissen wohl besser entsprechen wird.

Durch Abb. 13 ist uns auch der Bewegungsablauf in allen denjenigen Fällen gegeben, für die $R \leq a_0 \leq 4R$ ist. Wir haben nur den Nullpunkt der Zeitählung entsprechend zu verlegen.

Für den bis zur Zeit t zurückgelegten Weg s des Körpers bzw. für den Winkel φ , um den er sich gedreht hat, gilt

$$s = \int_0^t v dt, \quad \varphi = \int_0^t \omega dt. \quad (71)$$

s ist also gleich der Fläche zwischen der v -Kurve und der t -Achse, begrenzt durch die Ordinaten in den Punkten O und t , φ ist gleich der durch R geteilten entsprechenden Fläche zwischen der ωR -Kurve und der t -Achse. Für den in Abb. 13 dargestellten Fall ergibt sich, unter Vernachlässigung der strichpunktierten Ausrundung, für den insgesamt zurückgelegten Weg und bei einem Scheibenradius von $R = 0.10 \text{ m}$ für den gesamten Drehwinkel

$$s = 5.17 \text{ m}, \quad \varphi = 3 \cdot 360^\circ + 294^\circ.$$

(In der zweiten Bewegungsphase wurden die Flächen mittels der Simpsonschen Formel ermittelt.) Die Scheibe gleitet also etwas mehr als 5 m weit, bis sie zur Ruhe kommt und macht fast vier volle Umdrehungen.

(Eingegangen am 18. September 1946.)

Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung auf die Fließ- und Bruchgrenze.

Von C. Torre, Wien.

Mit 15 Textabbildungen.

I. Einleitung.

Ist ein Körper bis zur Grenze seiner Tragfähigkeit beansprucht, so wird meistens nach denjenigen Hauptnormalspannungen oder ihren Kombinationen gefragt, die diesen Grenzzustand verursacht haben. Oder es wird nach den Normal- und Schubspannungen in der Gleitfläche gefragt, die in dieser Fläche die ersten bleibenden Formänderungen oder den Bruch wirklich erzwungen haben. Nach einer älteren Auffassung, sollte man die absolut größte Hauptnormalspannung σ_1 bzw. σ_3 dafür verantwortlich machen. Nach dem Ansatz von Tresca und B. de Saint Venant sollte sich die Grenzbeanspruchung aus dem Unterschied der Hauptnormalspannungen ($\sigma_1 - \sigma_3$) ergeben. Obwohl dieser Ansatz einen Fortschritt gegenüber den ersten bedeutet, ist er unvollständig, weil dabei (abgesehen von anderen Einwänden) der Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung σ_2 nicht berücksichtigt ist.

Mit seiner Bruchtheorie hat Mohr¹ die Untersuchung des Einflusses der mittleren Hauptnormalspannung σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) eingeleitet. Er selbst hat keine Versuche durchgeführt, um diesen Einfluß festzustellen, sondern nur die in der Literatur damals vorliegenden Berichte benützt. Die wenigen Versuche, die Mohr¹ in der ersten Veröffentlichung zitieren konnte, sind diejenigen von Voigt² mit Steinsalz und Stearin, die Versuche von Föppl³ mit den (mit einem Druckkreuz belasteten) Würfeln aus Zementmörtel, Sandstein und Granit und die Versuche von Grübler mit rotierenden Scheiben aus Sandstein. Im Nachtrag hat Mohr noch die Versuche von Guest⁴ über die Festigkeit plastischer Materialien bei zusammengesetzter Beanspruchung beschrieben. Mohr findet in diesen Versuchen die Einflußlosigkeit der mittleren Hauptnormalspannung bestätigt. Dabei sieht er sowohl von den nichtübereinstimmenden Ergebnissen von Föppl³ mit ungeschmierten Druckflächen als auch von jenen geringen Abweichungen in den Versuchen von Guest⁴ mit reiner Schubbeanspruchung ab.

Systematische Versuche, die den Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung in der Mohrschen Bruchtheorie ergeben sollten, hat Kármán⁵ mit den zylindrischen Körpern aus Marmor und Sandstein durchgeführt. Dabei faßte er zwei Grenzfälle ins Auge: den Fall der sog. „Druckversuche“ mit $\sigma_2 = \sigma_1$ und der sog. „Zugversuche“ mit $\sigma_2 = \sigma_3$. Kármán⁵ führte die Druckversuche und Böker⁶ die Zugversuche durch. Über den Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung konnte Kármán⁵ nur mit Druckversuchen allein noch keine Feststellungen machen. Zum Schluß des Aufsatzes gab er der Vermutung Ausdruck (sich auf einen einzigen Versuch mit einem Marmorstab berufend), daß die Mohrsche Annahme der Einflußlosigkeit der mittleren Hauptnormalspannung kaum auf unbegrenzte Gültigkeit Anspruch erheben könne. Mohr¹ erwiderte in seinen „Abhandlungen“, seine Annahme sei damit nur scheinbar in Widerspruch gekommen, da der Versuchskörper zuerst dem allseitigen Druck ausgesetzt und dann zur Grenzbeanspruchung geführt wurde. Durch diesen Versuchsweg käme das Material nur zu einer Erhöhung seiner Tragfestigkeit.

¹ O. Mohr: Z. VDI 44, 1524 (1900); Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik, 3. Aufl., S. 192. Ernst & Sohn. 1928.

² W. Voigt: Ann. Physik u. Chem. 1894, 43; 1899, 452.

³ A. Föppl: Mitt. aus dem techn.-mech. Laboratorium München H. 27 (1900).

⁴ J. Guest: Philos. Mag. 50, 690 (1900).

⁵ Th. v. Kármán: Z. VDI 55, 1749 (1911); Forsch.-Arb. Ing.-Wes. 37, H. 118 (1912).

⁶ R. Böker: Forsch.-Arb. Ing.-Wes. H. 175/176 (1915).

Die Versuche von Böker⁶ mit Marmor- und Zinkkörpern sollten zur Klärung dieser Fragen beitragen. Die Vermutung des Auftretens einer Verfestigung des zuerst dem allseitigen Druck ausgesetzten Marmors hat sich als nicht richtig erwiesen. (Die Versuche von Roš und Eichinger⁷ mit porösen Stoffen, wie Zement und Gips, ergaben eine beträchtliche Erhöhung der Druckfestigkeit. Die Ergebnisse Bökers sind also nur auf Marmor zu beschränken.) Die Zugversuche mit Marmor auf sog. „Elastizitätsgrenze“ (sie ist im Scheitelpunkt der Spannungs-Dehnungs-Kurve angenommen) lassen auf einen Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung schließen, da zur Erreichung der Elastizitätsgrenze größere Unterschiede der Hauptnormalspannungen notwendig waren als für die Druckversuche; sie betragen 9 bis 11%. Die Versuche mit Zink haben aber umgekehrtes Verhalten gezeigt: das Fließen tritt bei Druckversuchen mit höheren Unterschieden von $(\sigma_1 - \sigma_3)$ auf als bei Zugversuchen. Sie ergaben auch keine Änderung der Schubspannung τ mit der wachsenden Normalspannung σ in der Gleitfläche (Hauptschubspannungstheorie). Auf Grund dieser Versuche herrschte noch lange die Meinung, daß die Versuchswerte um die Mohrsche Hüllkurve variieren, was die Richtigkeit dieser Annahme ergeben sollte. Spätere Versuche haben gezeigt, daß die Mohrsche Hüllkurve wirklich die mittlere Stellung annimmt; die Tatsache aber, daß sich die Hüllkurven bei den meisten Stoffen nicht decken (und zwar die Abweichung immer in der gleichen Richtung liegt), lassen auf einen Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung schließen.

Sehr eingehende und sorgfältig vorbereitete Versuche sind von Roš und Eichinger⁷ mit Marmor, Zement, Zementmörtel, Porzellan, Kunstharz und Gips durchgeführt worden. Der Bericht Nr. 14 (vgl.⁹) über die Versuche mit Baustählen ist dem Verfasser nur auszugsweise zugänglich gewesen, während er den Bericht über die Versuche mit Flußstahl, Stahlguß, Gußeisen, Aluminiumbronze, Kupfer und Tombak nicht erreichen konnte. Die Verfasser behalten ständig die wirkliche Beschaffenheit des Materials, nämlich die Heterogenität und Anisotropie der Stoffe im Auge. Die auf dem Manometer abgelesenen Spannungen sind für Roš und Eichinger⁷ nur statistische Mittelwerte der in den Versuchskörpern wirklich auftretenden Spannungen. Wir werden uns in diesem Beitrag damit begnügen, für die mathematisch idealen (homogenen und isotropen) Stoffe die näherungsweise übereinstimmenden Ergebnisse zu diesen statistischen Mittelwerten zu erhalten.

Roš und Eichinger⁷ haben versuchsmäßig den Übergang vom Gleit- zum Trennbruch nachgewiesen, den Leon⁸ später theoretisch an Hand der Hüllparabel abgeleitet hat; ebenso ist das von den Verfassern (s. Abb. 15) beobachtete Gebiet des konstanten Reißwiderstandes von Leon⁸ wiederholt theoretisch nachgewiesen worden.

Roš und Eichinger⁷ untersuchen eingehend den Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung auf Fließ- und Bruchgrenze. Für gewisse Stoffe — wie bei Marmor — wirkt die Spannung σ_2 verfestigend, für andere Stoffe aber — wie bei Zementmörtel — wirkt sie umgekehrt, d. h. bewirkt sie den vorzeitigen Bruch. Es gibt Gebiete — wie bei Marmor auf der Proportionalitätsgrenze (2‰-Grenze) und Zement —, wo die Spannung σ_2 von Einfluß ist (500 bis 1000 kg/cm²), während im Gebiete über 1000 kg/cm² bei den gleichen Stoffen die Spannung σ_2 fast ohne Einfluß ist. Auf Grund dieser sehr verschiedenen Erscheinungen, gestützt auf die verschiedenen Strukturen der Werkstoffe, weisen die Verfasser auf die Unmöglichkeit hin, eine allgemeine Bruchtheorie aufzustellen. In diesem Beitrag werden, abgesehen von der Struktur des Materials, die verschiedenartigen Einflüsse der mittleren Hauptnormalspannung

⁷ M. Roš und A. Eichinger: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr, Diskussionsbericht Nr. 28; II. Nichtmetallische Stoffe. E. M. P. A. an der E. Techn. Hochschule in Zürich, Juni 1928.

⁸ A. Leon: Ing.-Arch. 4, 421 (1933); Beton u. Eisen 34, 130 (1935).

nicht als eine Erschwerung der Theorie auftreten, da sich diese Theorie, wie die Mohrsche Hüllkurve, auf die Versuchsergebnisse stützen wird.

Roß und Eichinger⁹ haben weiter Versuche mit den Stoffen mit ausgeprägter Fließgrenze (Baustähle) durchgeführt. Der Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung ergab sich, wie in den Untersuchungen von Lode,¹⁰ zu max 15%. Die Versuche sind mit den Röhren auf Innendruck und Mantelzug, -druck oder -torsion durchgeführt, wobei nahezu genau der ebene Spannungszustand erreicht wird. Die Verfasser zeigen, daß eine einheitliche Hüllkurve für alle Versuchsergebnisse nicht möglich ist. In diesem Beitrag wird gezeigt, wie die verschiedenen Spannungskreise zu verwerten und verschiedene Hüllkurven zu zeichnen sind.

Die zahlreichen theoretischen Ansätze in der Literatur, die den Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung berücksichtigt haben, werden in der Einleitung nicht aufgezählt, sondern in der Abhandlung fallweise erwähnt werden.

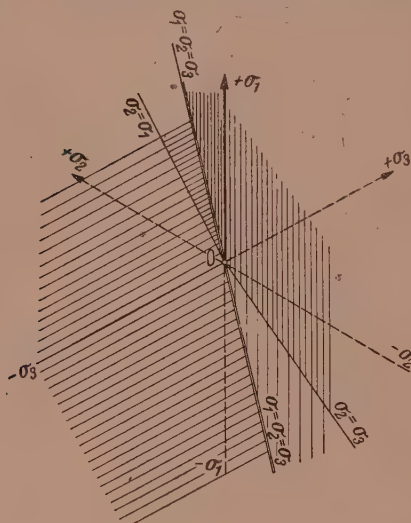


Abb. 1.

Die Aufgabe der Untersuchung des Einflusses der mittleren Hauptnormalspannung σ_2 wäre es, nicht nur diesen theoretisch festzustellen, sondern vielmehr die Ursachen dieses Einflusses zu erforschen. Einige Ergebnisse dieser Untersuchung sind: die Möglichkeit, den Begriff „Belastungsart“ mathematisch auszudrücken sowie über die Form der Grenzfläche im KS ($\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$) (KS = Koordinatensystem) aus der Form der Hüllkurve Schlüsse ziehen zu können. Weiterhin wäre hervorzuheben, daß sich je eine Hüllkurve entsprechend der „Belastungsart“ ergibt.

Wir setzen voraus, daß das Material homogen und isotrop ist. Mit φ, ψ, ϑ werden die Winkel zwischen der Normalspannung σ in der Gleitfläche und den Hauptnormal-

spannungen σ_1, σ_2 und σ_3 bezeichnet. Der „mittlere“ Winkel ψ sei gleich $\pi/2$. Für die Hauptnormalspannungen gelten die Verhältnisse

$$\begin{aligned} \text{mit den weiteren Beziehungen} \quad & \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \\ & \left. \begin{aligned} \sigma_2 &\geq \sigma_3, & \sigma_2 &\leq \sigma_1, & \sigma_1 &> \sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (1) \end{aligned}$$

Die Forderung $\sigma_1 > \sigma_3$ (nicht $\sigma_1 \geq \sigma_3$, wie dies in der Literatur zu finden ist) liefert im Scheitel der Hüllkurve im KS (σ, τ) immer einen Krümmungskreis, womit wir mit Leon⁸ übereinstimmen. $\sigma_1 = \sigma_3$ kommt in der Bruchtheorie nur einmal vor, nämlich bei allseitig gleichem Zug im Raume σ_{s4} . Diese Spannungsverhältnisse Gl. (1) begrenzen im KS ($\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$) einen Raum, der in Abb. 1 von der negativen Achse ($-\sigma_3$) und ($-\sigma_2$) aus gesehen ist. Eine ähnliche Abbildung findet man bei Geiringer und Prager¹¹ (S. 315, Abb. 4).

⁹ M. Roß und A. Eichinger: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr, Diskussionsbericht Nr. 14 der E. M. P. A. in Zürich, September 1926. — Auszugsweise s.: Verhandlungen des 2. intern. Kongresses für Techn. Mechanik, S. 315. Zürich. 1926.

¹⁰ W. Lode: Z. angew. Math. Mech. 5, 142 (1925); Z. Physik 36, 913 (1926); Forsch.-Arb. Ing.-Wes. H. 303 (1928).

¹¹ H. Geiringer und W. Prager: Mechanik isotroper Körper im plastischen Zustand. Ergebn. exakt. Naturwiss. 13, 311 (1933).

Die alle auf einer Grenze der Beanspruchung liegenden Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ bilden im KS $(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)$ eine **Grenzfläche**

$$F(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1) = 0. \quad (2)$$

Nádai¹² (S. 36) nennt sie die „Fließgrenzfläche“, wenn er an die dehnbaren Stoffe denkt und „Zerreißgrenzfläche“, wenn es sich hauptsächlich um spröde Stoffe (mit Trennbruch) handelt. Im Abschnitt VI wird gezeigt, daß die Aufteilung in diese zwei großen Gruppen auch mathematisch berechtigt ist, jedoch nur dann, wenn die einachsige Zugbeanspruchung einen Gleit- oder Trennbruch liefern muß. Da andererseits jeder Stoff eine andere Grenzfunktion Gl. (2) befriedigt, nennen wir sie nach Schleicher¹³ allgemein die Grenzfläche. Sie soll in jedem Punkt m $(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)$ **eindeutig, endlich und stetig** sein; sie muß überall mindestens stetige erste Ableitungen $\partial\sigma_1/\partial\sigma_3$ und $\partial\sigma_1/\partial\sigma_2$ haben.

II. Der Spannungszustand.

Die durch ihre elementare Wirkungsfläche df dividierte Kraft $d\mathfrak{R}$ heißt bezogene Spannung oder einfach Spannung und wird mit p bezeichnet.

Wir nehmen aus einem im Gleichgewicht befindlichen Körper einen Punkt P heraus, in welchem der Ursprung eines beliebigen KS (x, y, z) angenommen sei (Abb. 2). n sei die Normale der Fläche df , in welcher der Punkt P liegt und schließe mit den Achsen x, y, z die Winkel φ, ψ, ϑ ein. Sind die auf die Koordinatenebenen bezogenen Komponenten der auf die Fläche df wirkenden Spannung p mit p_i, p_j, p_k bezeichnet, dann ergibt sich aus dem Gleichgewicht der Kräfte die Spannung p (nach der Kürzung durch df):

$$p = p_i \cos \varphi + p_j \cos \psi + p_k \cos \vartheta. \quad (3)$$

Der Spannungszustand in der Umgebung eines Punktes P ist bekannt, wenn man für beliebige Richtung des Flächenelementes df stets die Spannung p nach Größe, Richtung und Sinn angeben kann.

Der Einsvektor¹⁴ der Normalen ist mit

$$n = i \cos \varphi + j \cos \psi + k \cos \vartheta \quad (4)$$

zu nehmen, wenn i, j, k die Einsvektoren auf den Achsen x, y, z sind. Die Spannungsdjade nennen wir nach Lagally¹⁵ die Größe

$$\mathfrak{f} = i p_i + j p_j + k p_k. \quad (5)$$

Die Produkte der Vektoren $i p_i$ usw. sind sog. „unbestimmte“ Produkte, die nur symbolische Bedeutung besitzen und die erst durch das skalare Produkt mit dem Einsvektor der Normalen Gl. (4) einen Sinn erhalten. Da in den unbestimmten Produkten je zwei Vektoren auftreten, heißen sie dyadische Produkte. In Gl. (5) ist (siehe auch Abb. 2)

$$\left. \begin{aligned} p_i &= i \sigma_x + j \tau_{xy} + k \tau_{xz}, \\ p_j &= i \tau_{yx} + j \sigma_y + k \tau_{yz}, \\ p_k &= i \tau_{zx} + j \tau_{zy} + k \sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

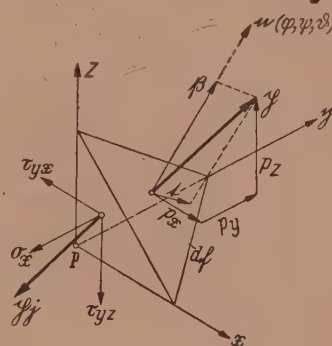


Abb. 2.

¹² A. Nádai: Der bildsame Zustand der Werkstoffe. Springer-Verlag. 1927.

¹³ F. Schleicher: Z. angew. Math. Mech. 6, 199 (1926).

¹⁴ Diese Benennung findet man bei A. Duschek und A. Hochrainer, Tensorrechnung I, Springer-Verlag 1946.

¹⁵ M. Lagally: Vorlesungen über Vektor-Rechnung. Akad. Verlagsges. 1934.

zu nehmen, wobei $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ usw. die Spannungskomponenten nach Abb. 2 sind.

Die Spannungsdjade \mathfrak{f} soll, bezogen auf drei zueinander senkrechte Einsvektoren i, j, k (ein Dreibein), nach Gl. (5) und (5a) in der Form

$$\mathfrak{f} = i i \sigma_x + j j \sigma_y + k k \sigma_z + j k \tau_{yz} + k j \tau_{zy} + k i \tau_{zx} + i k \tau_{xz} + i j \tau_{xy} + j i \tau_{yx} \quad (6)$$

angesetzt werden..

Durch das skalare Produkt des Einsvektors der Normalen Gl. (4) und der Spannungsdjade Gl. (5) ergibt sich die auf ein beliebig gerichtetes Flächenelement bezogene Spannung

$$p = n \cdot \mathfrak{f}, \quad (7)$$

wobei das skalare Produkt mit \cdot bezeichnet ist. Der Spannungszustand p wird demnach durch eine lineare Vektorfunktion ausgedrückt. Geometrisch kann man die in Gl. (7) vorkommende Dyade \mathfrak{f} als Operator auffassen, der die affine Abbildung des Raumes n auf den Raum p vermittelt.

Durch den Flächensatz kann man beweisen, daß der Vektor \mathfrak{f}_\times der Spannungsdjade \mathfrak{f} (mit \times ist das Vektorprodukt der Faktoren von \mathfrak{f} bezeichnet):

$$\mathfrak{f}_\times = i \times p_i + j \times p_j + k \times p_k = 0 \quad (8)$$

symmetrisch ist. Aus Gl. (8) und (5a) ergibt sich die Gleichheit der zugeordneten Schubspannungskomponenten in zueinander senkrechten Schnitten:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (9)$$

Die Schubspannungskomponenten verschwinden für drei ausgezeichnete Richtungen der Normalspannungen, die Hauptnormalspannungen heißen und mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ bezeichnet sind. Die Größenverhältnisse dieser Spannungen sind in Gl. (1) festgelegt.

Die Spannung p soll jetzt in Komponenten in Richtung der drei Koordinatenachsen wie folgt zerlegt werden (s. Abb. 2):

$$p = i p_x + j p_y + k p_z. \quad (10)$$

Die Größe dieser Komponenten erhält man aus Gl. (4) und (6) bzw. aus Gl. (7) zu:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= n \cdot \mathfrak{f} \cdot i = \sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \cos \psi + \tau_{xz} \cos \vartheta, \\ p_y &= n \cdot \mathfrak{f} \cdot j = \tau_{yx} \cos \varphi + \sigma_y \cos \psi + \tau_{yz} \cos \vartheta, \\ p_z &= n \cdot \mathfrak{f} \cdot k = \tau_{zx} \cos \varphi + \tau_{zy} \cos \psi + \sigma_z \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Fällt die Spannung \mathfrak{f} (Abb. 2) in die Richtung der Normalen n , so lauten die Komponenten der Spannung p (hier ist $p \equiv \mathfrak{f}$ und $|\mathfrak{f}| = \sigma$)

$$p_x = \sigma \cos \varphi, \quad p_y = \sigma \cos \psi, \quad p_z = \sigma \cos \vartheta. \quad (11a)$$

Weiter ist

$$\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi + \cos^2 \vartheta = 1. \quad (11b)$$

Setzen wir Gl. (11a) in Gl. (11), so bekommt man daraus und aus Gl. (11b) eine kubische Gleichung für die Berechnung der Hauptnormalspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0,$$

mit den Invarianten:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ J_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ J_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Die Invariante J_1 ergibt sich auch aus dem skalaren Produkt der Faktoren der Dyade \mathfrak{f} zu: $J_1 = i \cdot p_i + j \cdot p_j + k \cdot p_k = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$. Aus Gl. (12) kann man die Hauptnormalspannungen berechnen, wenn die Spannungskomponenten gegeben sind.

Für die Hauptachsenrichtungen des Spannungszustandes erhält man nach dem Verschwinden der Schubspannungskomponenten aus Gl. (11)

$$p_1 = \sigma_1 \cos \varphi_0, \quad p_2 = \sigma_2 \cos \psi_0, \quad p_3 = \sigma_3 \cos \vartheta_0, \quad (11c)$$

wobei mit $\varphi_0, \psi_0, \vartheta_0$ die Lage der Normalen n gegen die Hauptachsen gegeben ist. Da das KS (x, y, z) in das KS $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ übergegangen ist, so ist nach Gl. (11): $p_x = p_1, p_y = p_2, p_z = p_3$ zu nehmen.

Den Spannungsvektor p kann man in eine zur Richtung n gehörige Normalspannung \bar{p} und in die im Flächenelement df liegende Schubspannung t (Abb. 2) zerlegen; demnach ist $p = \bar{p} + t$. Der Betrag σ des Normalspannungsvektors \bar{p} ergibt sich aus Gl. (3) und (4) bzw. (7) zu

$$\sigma = p \cdot n = n \cdot \bar{p} = \sigma_1 \cos^2 \varphi_0 + \sigma_2 \cos^2 \psi_0 + \sigma_3 \cos^2 \vartheta_0, \quad (13)$$

wobei $i \cdot p_i = \sigma_1, j \cdot p_j = \sigma_2, k \cdot p_k = \sigma_3$ ist. Aus Gl. (11c) ergibt sich der Betrag p des Spannungsvektors p zu

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \varphi_0 + \sigma_2^2 \cos^2 \psi_0 + \sigma_3^2 \cos^2 \vartheta_0 \quad (14)$$

und aus $\tau^2 = p^2 - \sigma^2$ erhält man aus Gl. (14) und (13) den Betrag τ des Spannungsvektors t zu

$$\tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \psi_0 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \cos^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \cos^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0. \quad (15)$$

Aus Gl. (11b), (13) und (15) kann man die Richtungskosinuse der Normalen berechnen (vgl.¹⁶) zu

$$\cos^2 \varphi_0 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}, \quad (16a)$$

$$\cos^2 \psi_0 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}, \quad (16b)$$

$$\cos^2 \vartheta_0 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \quad (16c)$$

Wenn wir nach Mohr¹ im KS (σ, τ) (s. Abb. 3) die Spannungskreise mit den Durchmessern $(\sigma_1 - \sigma_2), (\sigma_2 - \sigma_3)$ und $(\sigma_1 - \sigma_3)$ zeichnen und die Winkel $\varphi_0, \psi_0, \vartheta_0$ wie in Abb. 3 auftragen, so läßt sich leicht beweisen, daß die Koordinaten σ und τ des Punktes M , der mit den konzentrischen Kreisen nach Abb. 3 erhalten wird, mit den Ausdrücken σ und τ in Gl. (13) und (15) übereinstimmen. Da die Richtungskosinuse nach Gl. (16) nur reelle Werte annehmen können, so folgt, daß alle Punkte $M(\sigma, \tau)$ im Gebiet zwischen den drei Kreisen liegen müssen (vgl.¹⁶).

Fällt der Punkt M z. B. auf den Kreis über $(\sigma_1 - \sigma_3)$, so erhält man (s. Abb. 3) $\varphi + \vartheta = \pi/2$ und dann nach Gl. (11b) $\psi = \pi/2$, wodurch der Zähler der Gl. (16b) zu Null wird:

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) = 0. \quad (17)$$

Gl. (17) ist nämlich die Gleichung des Kreises über $(\sigma_1 - \sigma_3)$. Ähnliches gilt, wenn der Punkt M auf einen der zwei anderen Kreise fällt. Diese Ableitungen brauchen wir für den Abschnitt IV.

III. Mathematischer Ausdruck für die „Belastungsart“.

Mit dem Ausdruck „Belastungsart“ meint Fromm¹⁷ alle Belastungen eines isotropen Stoffes, die im KS $(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)$ einen durch den Koordinatenursprung gehenden Strahl bilden. Kármán⁵ nennt die schon erwähnten Druck- und Zugversuche die

¹⁶ Handbuch der Physik, Bd. VI; Aufsatz von E. Trefftz: Mathematische Elastizitätstheorie, S. 47. Springer-Verlag. 1928.

¹⁷ Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik, Bd. IV/1; Aufsatz von H. Fromm: Grenzen des elastischen Verhaltens beanspruchter Stoffe, S. 359. A. Barth. 1931.

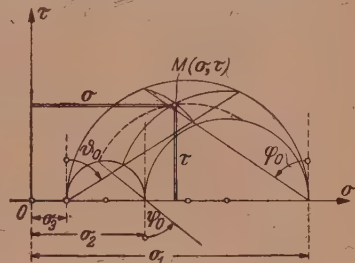


Abb. 3.

„Arten des Spannungszustandes“; im KS ($\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$) stellen diese zwei Fälle zwei Ebenen $\sigma_2 = \sigma_1$ und $\sigma_2 = \sigma_3$ dar, was mit der Forderung Fromms nicht übereinstimmt. Den Begriff „Belastungsart“ findet man sehr oft in der Literatur erwähnt: Roß und Eichinger⁷ beziehen sich auf die „Beanspruchung gleicher Art“ und sie stimmen in der mathematischen Formulierung derselben mit Kármán⁵ überein; Lode¹⁰ verwendet den Ausdruck „Beanspruchungsart“ ohne mit Kármán⁵ übereinzustimmen; Leon¹⁸ versucht, mit einer Hüllparabel die verschiedenen „Beanspruchungsarten“ zu umfassen. Die einfachen Belastungsarten sind: Zug, Druck, Verdrehung und Abscheren. Von einer Belastungsart im verallgemeinerten Sinne kann man dann sprechen, wenn eine einfache Beanspruchung unter allseitig gleichem Druck durchgeführt wird.

Im folgenden wird der Begriff „Belastungsart“ mathematisch ausgedrückt und es wird versucht, ihn der Anwendung zugänglich zu machen. Wir nehmen an, daß sich die Hauptnormalspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ untereinander proportional ändern, während Fromm¹⁷ die Änderung dieser Spannungen noch gegenüber dem Koordinatenursprung proportional annimmt. Bei Leon (Merkblatt M 909, 1933 T. H. Graz) findet man folgende mit unserer Annahme besser übereinstimmende Definition: Die Art des Spannungszustandes ist durch das Verhältnis der drei Hauptnormalspannungen gekennzeichnet. Den mathematischen Ausdruck erreichen wir wie folgt: im KS (σ, τ) ist der Durchmesser ($\sigma_1 - \sigma_3$) des Spannungskreises in B Teile (s. Abb. 4), ($\sigma_2 - \sigma_3$) in A Teile und ($\sigma_1 - \sigma_2$) in C Teile geteilt. Daraus folgt

$$B = A + C \quad (18a)$$

und

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{C} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{A} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{B}. \quad (18b)$$

Aus Gl. (18a) und (18b) erhält man die mittlere Hauptnormalspannung als lineare Funktion der anderen beiden Spannungen zu

$$\sigma_2 = \frac{A \sigma_1 + C \sigma_3}{A + C}. \quad (18c)$$

Um Gl. (18c) im KS ($\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$) deuten zu können, nehmen wir den analytischen Ausdruck für die durch die Gerade $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ gehende Ebene

$$A \sigma_1 + B \sigma_2 + C \sigma_3 = 0 \quad \text{mit} \quad A + B + C = 0. \quad (18d)$$

Mit $\alpha = A/(A + C)$ und $\beta = C/(A + C)$ ergibt sich aus Gl. (18d)

$$\sigma_2 = \alpha \sigma_1 + \beta \sigma_3 \quad \text{mit} \quad \alpha + \beta = 1. \quad (18)$$

Da Gl. (18) mit Gl. (18c) identisch ist, so enthält Gl. (18) den mathematischen Ausdruck für die Belastungsart, welchen wir, nach einem dem Verfasser von Herrn Professor Dr. Ing. O. Fröhlich mitgeteilten Vorschlag, die **Belastungscharakteristik** nennen wollen. Sie stellt die Nebenbedingung der Grenzfläche Gl. (2) dar. Hier ist der Ansatz von Fromm¹⁷ soweit verallgemeinert, daß die Belastungsart nicht mit einem Strahl, sondern mit einer Ebene nach Gl. (18) definiert wird. Vielmehr kann man die Annahme Fromms nur in der Theorie des Erddruckes verwenden, da sie schließlich die durch den Koordinatenursprung des KS (σ, τ) gehende Hüllgerade liefert.

Für die später abgeleiteten Beziehungen zwischen der Grenzfläche Gl. (2) und Hüllkurve Gl. (24) sind noch die folgenden Eigenschaften hervorzuheben: a) Ist

¹⁸ A. Leon: Gießerei 20, 434 (1933).

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, so fällt die Hüllkurve $\tau = \tau(\sigma)$ mit der σ -Achse zusammen, da nach Gl. (15) $\tau = 0$ wird. Wir bekommen dann die Identität

$$\sigma \equiv \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad (19)$$

zwischen der σ -Achse und der Geraden $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ im KS $(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)$. Gl. (19) ergibt sich auch aus Gl. (13) mit Gl. (11b). — b) Mit $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ wird die Ebene (σ, τ) gemäß der Änderung von σ_2 einem Büschel von Ebenen Gl. (18) entsprechen.

Die Belastungsarten von Kármán:⁵ $\sigma_2 = \sigma_1$ und $\sigma_2 = \sigma_3$ erhält man aus Gl. (18) mit $\alpha = 1, \beta = 0$ bzw. $\alpha = 0, \beta = 1$; sie bedeuten in Abb. 1 die Abgrenzung der Gültigkeitsbereiche. Damit hat Kármán⁵ nur zwei Sonderfälle der Belastungscharakteristik Gl. (18) behandelt.

Anders ist es bei Lode,¹⁰ der einer allgemeinen Formulierung der Belastungsart am nächsten stand. Er hat den Ausdruck

$$(1 + \mu) \sigma_1 - 2 \sigma_2 + (1 - \mu) \sigma_3 = 0$$

aufgestellt, also eine Ebene, die der Bedingung Gl. (18d): $A + B + C = 0$ genügt. Aber die Spannungszustände mit gleichem μ nimmt er nicht als eine und dieselbe Belastungsart: für den Fall $\mu = +1$ berechnete er zwei Belastungsarten, ebenso für $\mu = -1$. Damit hat er, im Gegensatz zu Kármán,⁵ den allgemein gültigen Ausdruck für die Belastungsart aufgestellt, aber in der Anwendung (ebenso in der allgemeinen Ableitung und Definition) erfüllte er nicht die hier aufgestellten Forderungen.

Mises¹⁹ hat die Grenzfläche im KS (τ_1, τ_2, τ_3) , die die Kugelform hat, berechnet; hier sind $\tau_1 = (\sigma_2 - \sigma_3)/2$, $\tau_2 = (\sigma_3 - \sigma_1)/2$, $\tau_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ die Hauptschubspannungen. Die von ihm aufgestellte Nebenbedingung $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$ verschwindet im KS $(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)$ identisch.

Gewisse, der mit Gl. (18) aufgestellten Belastungsarten können nach einer darin enthaltenen einfachen Beanspruchung genannt werden. Neben schon erwähnten Zug- und Druckbeanspruchungen, die in sich den einachsigen Zug- und Druckbeanspruchung enthalten, kann man z. B. noch im Fall $\alpha = \beta = 1/2$ nach Gl. (18) von „Verdrehungsbeanspruchungen“ sprechen, da er in sich die einfache Beanspruchung auf Verdrehung enthält.

IV. Die Spannungen in der Gleitebene nach der Näherung $\psi = \pi/2$.

Die Normal- und Schubspannung in der Gleitebene nach Gl. (13) und (15) lauten mit Gl. (18) (statt φ_0 usw. wird weiterhin einfach φ usw. geschrieben)

$$\sigma = \sigma_1 (\cos^2 \varphi + \alpha \cos^2 \vartheta) + \sigma_3 (\cos^2 \vartheta + \beta \cos^2 \varphi), \quad (20a)$$

$$\tau = \pm (\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{(\beta^2 \cos^2 \varphi + \alpha^2 \cos^2 \vartheta) \cos^2 \varphi + \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi}, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (20b)$$

Außerdem wird die Grenzfläche Gl. (2) eine Funktion des Parameters α sein:

$$F(\sigma_3, \sigma_1, \alpha) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq +1. \quad (21)$$

Gl. (21) sei zum Unterschied von der Grenzfläche die Grenzkurve genannt. Sie stellt im KS (σ_3, σ_1) eine Schar ebener vom Parameter α abhängiger Kurven dar. Eine von diesen, für $\alpha = 0$ (Zugversuche), ist in Abb. 5 schematisch gezeichnet. Die Länge \overline{OC} gibt den einachsigen Zugversuch ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \sigma_1 = +\sigma_s$), die Länge \overline{OB} den Umschlingungsdruckversuch ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_{qu}$), der zu dieser Belastungsart gehört. Im Punkte A ($\max \sigma_3, \max \sigma_1$) erreicht die Grenzkurve Gl. (21) das Maximum ($dF/d\sigma_3 = 0$). Aus der schematisch gezeichneten Abb. 5 ist die Hüllkurve in Abb. 6 durch das Abnehmen der Spannungen σ_3 und σ_1 konstruiert. Die Punkte A, B, C, M sind in beiden Abbildungen nach den gegenseitigen Beziehungen aufgetragen.

¹⁹ R. v. Mises: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 'H. 4, 582 (1913).

Da der Punkt M auf die Peripherie des Kreises über $(\sigma_1 - \sigma_3)$ fällt, so betragen die Gleitwinkel $\varphi + \vartheta = \pi/2$ und $\psi = \pi/2$, wie dies schon im Abschnitt II hervorgehoben ist. Den Winkel $\psi = \pi/2$ bekommt man immer, wenn man die Grenzkurve Gl. (21) in eine Hüllkurve transformiert. Mit $\psi = \pi/2$, $\vartheta = \pi/2 - \varphi$ und mit $\cos^2 \varphi = 1/(1 + \tan^2 \varphi)$, $\sin^2 \varphi = \tan^2 \varphi / (1 + \tan^2 \varphi)$ erhält man aus Gl. (20a) und (20b) die Spannungen in der Gleitebene

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}, \quad \tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 + \tan^2 \varphi} \tan \varphi, \quad (22a, b)$$

wobei nur noch die Größe $\tan \varphi$ zu berechnen wäre. Der Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung σ_2 , der hier durch die Wahl des Parameters α zum Ausdruck kommt, ist in Gl. (22a) und (22b) in der Größe $\tan \varphi$ enthalten, wie nachstehend gezeigt wird.

Gl. (17) ist die Gleichung des Kreises

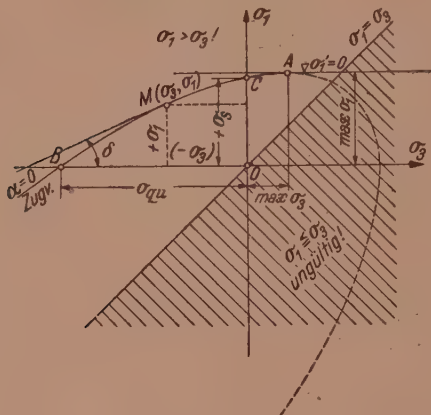


Abb. 5.

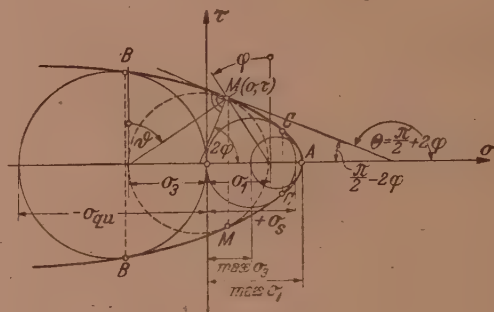


Abb. 6.

im Punkt M (Abb. 6) für den Fall $\psi = \pi/2$, die wir in folgender Form schreiben wollen (aequatio directrix):

$$W \equiv \sigma^2 + \tau^2 - \sigma(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_1 \cdot \sigma_3 = 0. \quad (23)$$

Die nachstehenden Ableitungen, die der Verfasser²⁰ schon durchgeführt hat, sind hier mathematisch näher ausgeführt. Nach Goursat²¹ oder Madelung²² erhält man die Bedingung für die Berührungstransformation der Grenzkurve Gl. (21) in der Hüllkurve

$$\tau = \tau(\sigma) \quad (24)$$

aller Spannungskreise Gl. (23) zu

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_3} + \frac{\partial W}{\partial \sigma_1} \sigma_1' = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma} + \frac{\partial W}{\partial \tau} \tau' = 0, \quad (25a, b)$$

wobei mit $\sigma_1' = d\sigma_1/d\sigma_3$ und $\tau' = d\tau/d\sigma$ bezeichnet ist. Aus Gl. (23) und (25a, b) bekommt man die Normal- und Schubspannung in der Gleitebene

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 \sigma_1'}{1 + \sigma_1'}, \quad \tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 + \sigma_1'} \cdot \sqrt{\sigma_1'} \quad (26a, b)$$

und die Ableitung

$$\tau' = \mp \frac{1 - \sigma_1'}{2\sqrt{\sigma_1'}}. \quad (27)$$

²⁰ C. Torre: Österr. Ing.-Arch. 1, 36 (1946).

²¹ E. Goursat: Cours d'analyse mathématique, Tome I, 2. édition, S. 140ff. Gauthier-Villars. 1910. — Deutsch von J. M. Schwarz: Lehrbuch der Analysis, S. 126. Veit-Verlag. 1914.

²² E. Madelung: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, 3. Aufl., S. 104. Springer-Verlag. 1936. — Eingehend siehe bei Sophus Lie: Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von S. Lie und G. Scheffers. Bd. I. Verlag Teubner. 1896.

Im beliebigen Punkt M (Abb. 6) ist: $\tau' = \operatorname{tg} \Theta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + 2\varphi \right) = -1/\operatorname{tg} 2\varphi$, oder nach Gl. (27)

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \pm \frac{2\sqrt{\sigma_1'}}{1-\sigma_1'} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{\sigma_1'}. \quad (27a, b)$$

Gl. (27a) und (27b) bekommt man auch aus dem Koeffizientenvergleich der Gl. (26a) und (26b) mit Gl. (22a) und (22b). Da die Schubspannung τ nach Gl. (26b) nur die reellen Werte annehmen kann, so muß in Gl. (27b) $\sigma_1' \geq 0$ sein. Nach Abb. 5 ergibt sich $\operatorname{tg}^2 \varphi = \operatorname{tg} \delta$.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Berührungstransformation:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_1'} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_3} + \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_1'} \sigma_1' \right) = \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_1'} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_3} + \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_1'} \sigma_1' \right)$$

ist mit Gl. (26a) und (26b) erfüllt.

Gl. (26a) und (26b) sind zur Berechnung der Spannungen σ und τ in der Gleit-ebene geeignet, wenn die Funktion $\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_3)$, d. h. die Grenzkurve Gl. (21) gegeben ist. Das umgekehrte Problem wäre es, die Hauptnormalspannungen zu berechnen, wenn die Hüllkurve Gl. (24) gegeben ist. Die Lösung ergibt sich aus Gl. (26a), (26b) und (27) (mit $\tau' > 0$) zu

$$\sigma_{1,3} = \sigma + \tau \tau' \pm \sqrt{\tau^2 + (\tau \tau')^2}. \quad (28a, b)$$

Diese Gleichungen hat Verfasser²⁰ schon auf anderem Wege erhalten.

Der Krümmungshalbmesser der Hüllkurve lautet

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{1 + \sigma_1'}{\sigma_1''} \cdot \sigma_1'. \quad (28c)$$

Da der Krümmungshalbmesser eine wesentlich positive Größe ist und hier allgemein größer als der Halbmesser des Spannungskreises über $(\sigma_1 - \sigma_3)$ sein muß (außer im Scheitel der Hüllkurve, wo $\sigma_1' = 0$ gilt), so müssen die beiden Glieder der Gl. (28c) positiv sein. Wegen $\sigma_1 > \sigma_3$ [vgl. Gl. (1)] ist das erste Glied immer positiv. Im zweiten Glied für die reelle Hüllkurve gilt: $\sigma_1' \geq 0$. Um das zweite Glied positiv zu erhalten, muß die zweite Ableitung $\sigma_1'' < 0$ sein. Dieses Ergebnis ist für unsere Kenntnisse über die Form der Grenzkurve Gl. (21) [bzw. der Grenzfläche Gl. (2)] sehr wichtig, da es besagt, daß es im ganzen Gebiet $\sigma_1 > \sigma_3$ bis zum Punkt $\sigma_1 = \sigma_3$, s. Abb. 5, wo aber die Hüllkurve wegen $\sigma_1' < 0$ imaginär und ihr Krümmungshalbmesser Gl. (28c) kleiner als der Halbmesser des Spannungskreises wird, keinen Wendepunkt geben kann und daß die Grenzkurve in diesem Gebiet ihre konkave Seite der Geraden $\sigma_1 = \sigma_3$ ständig zuwenden muß, wie die Hüllkurve ihre konkave Seite ständig der σ -Achse zukehrt.

Die Zuordnung der Grenzkurve zur Hüllkurve ist mit Gl. (26a) und (26b), die umgekehrte Zuordnung mit Gl. (28a) und (28b) gegeben. Das Zuordnungsgesetz ergibt sich aus Gl. (27b) zu $\operatorname{tg}^2 \varphi = \sigma_1'$. Aus dieser Gl. (27b) bekommt man die untere Grenze des Gültigkeitsbereiches mit $\sigma_1' \geq 0$; die obere Grenze ist aus den Versuchen mit $\sigma_1' \leq +1$ festgestellt (nach Kármán⁵ und Mohr¹ soll die Hüllkurve zwei zur σ -Achse parallele Gerade haben). Damit ist ein analytischer Beweis für die Verwandtschaft beider Grenzbedingungen erbracht.

Den exakten, weitertragenden Beweis dieser Zuordnung bekommt man mit Hilfe der zyklographischen Abbildung.²³ Es sei hier auf die Arbeiten von Müller²⁴

²³ Diese geometrische Beweisführung verdanke ich Herrn Professor Dr. W. Wunderlich.

²⁴ E. Müller: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. II: Die Zyklographie. Herausgegeben von J. L. Krames. F. Deuticke. 1929. — Siehe besonders VI. Kapitel: Zyklographische Abbildung von Kurven, S. 245.

hingewiesen, dessen Ausführungen sich für unsere Untersuchung oft wörtlich anwenden lassen.

Die Grenzkurve Gl. (21) wird zuerst im KS $(p_m, \max \tau)$ mit

$$p_m = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3), \quad \max \tau = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

transformiert, wobei p_m die mittlere Belastung und $\max \tau$ die Hauptschubspannung ist. Dann geht Gl. (21) in $\max \tau = \max \tau(p_m, \alpha)$ (21a)

über. Damit ist die Grenzkurve Gl. (21) um 45° gedreht und um $1/\sqrt{2}$ verkleinert. Bezeichnen wir mit $\max \tau' = d \max \tau / dp_m$, so ist $\max \tau' = \frac{\sigma_1' - 1}{\sigma_1' + 1}$. Die einer reellen Hüllkurve entsprechenden Grenzen sind für Gl. (21a) (aus $0 \leq \sigma_1' \leq +1$) mit $0 \geq \max \tau' \geq -1$ gegeben.

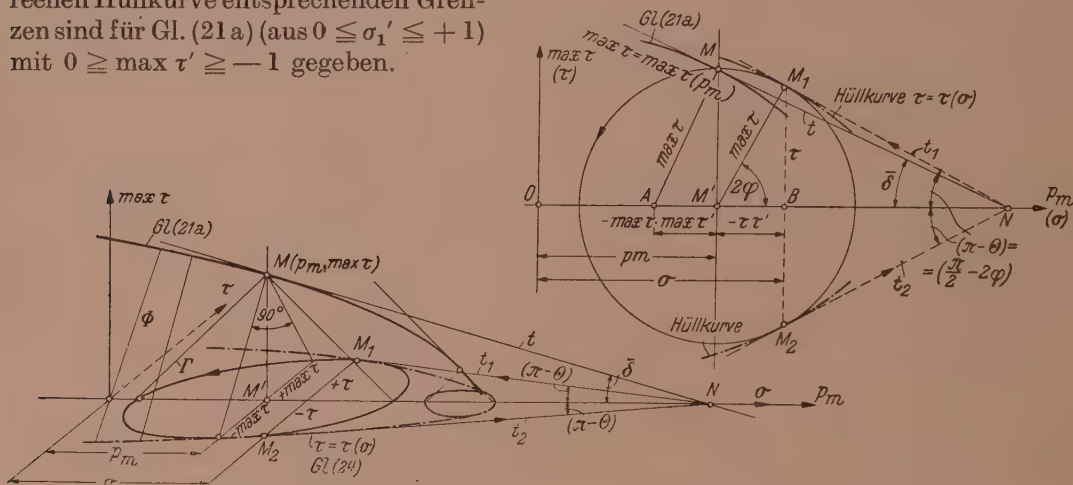


Abb. 7 a.

Abb. 7 b.

In Abb. 7 a steht die Ordinate $\max \tau$ senkrecht zur Ebene (σ, τ) und die Abszisse p_m fällt mit σ zusammen. Einem Punkt M in der Ebene $(p_m, \max \tau)$ (allgemein: im Raume) ist ein orientierter Kreis (ein Zykel) in der Ebene (σ, τ) zugeordnet dadurch, daß man einen Kegel Γ mit dem Öffnungswinkel von 90° , dessen Spitze im Punkt M ist, zum Schnitt mit der Ebene (σ, τ) bringt. M' ist die senkrechte Projektion von M auf die Ebene (σ, τ) . Der Mohrsche Spannungskreis ist also das zyklographische Bild des zugehörigen Punktes M ; die Hüllkurve aller Kreise Gl. (23) ist dann das zyklographische Bild der Kurve Gl. (21a). Sie ist die Spurkurve der durch die Kurve Gl. (21a) legbaren Böschungsfläche (Torse) Φ von 45° Steigung (s. Abb. 7 a).

Die Tangente t im Punkt M bildet sich zyklographisch auf das aus ihrem Spurpunkt N an den Bildzykel von M legbare Tangentenpaar t_1 und t_2 ab (s. Abb. 7 a und 7 b). Die Berührungspunkte M_1, M_2 mit dem Kreise sind auch die Berührungspunkte mit der Hüllkurve. Auf diese Weise ist die Hüllkurve aus der Grenzkurve leicht graphisch zu ermitteln; Abb. 7 b zeigt die Konstruktionsvorschrift.

Wie man sieht, sind bereits allein durch Angabe der Tangente t (ohne Kenntnis ihres Berührungspunktes) die entsprechenden Hüllkurventangenten t_1, t_2 bestimmt. Es liegt mithin eine Strahltransformation zwischen den Ebenen $(p_m, \max \tau)$ und (σ, τ) vor, die in der Grenz- und Hüllkurve einander entsprechen. Die Strahlverwandtschaft ist zweizweideutig, denn jeder Geraden t werden zwei zur σ -Achse symmetrische Bildgeraden t_1, t_2 zugeordnet, und umgekehrt ist jede Gerade t_1 von (σ, τ) zyklographisches Bild zweier zur p_m -Achse symmetrischer Geraden in $(p_m, \max \tau)$; sie ist ferner quadratisch, denn wenn sich t um M dreht, so umhüllt t_1 den Bildkreis von M .

• Das aus Abb. 7b ablesbare Zuordnungsgesetz $\cos 2\varphi = -\operatorname{tg} \bar{\delta}$ ist äquivalent Gl. (27b).

Nach Abb. 7b gilt folgender Satz: Die Subnormalen der Grenzkurve $\max \tau (p_m)$ und der Hüllkurve $\tau(\sigma)$ sind gleich groß. Also $\overline{AM'} = \overline{M'B}$ bzw.

$$\max \tau \cdot \max \tau' = \tau \cdot \tau', \quad (\text{I})$$

wo $\max \tau' = d \max \tau / d p_m$ ist. Dabei kann die Abszisse σ nur eine Tangente der auf die Ebene (σ, τ) projizierten Raumkurve sein. Nach Gl. (I) und den Angaben in Abb. 7b bekommt man die Transformationsgleichungen für den Übergang vom KS $(p_m, \max \tau)$ in das KS (σ, τ) und umgekehrt zu

$$\sigma = p_m - \max \tau \cdot \max \tau', \quad \tau^2 = \max \tau^2 - (\max \tau \cdot \max \tau')^2 \quad (\text{II})$$

$$\text{und} \quad p_m = \sigma + \tau \cdot \tau', \quad \max \tau^2 = \tau^2 + (\tau \cdot \tau')^2. \quad (\text{III})$$

Die schon durchgeführte Ermittlung der Grenzkurve Gl. (21) aus der Projektion des Schnittes der Grenzfläche Gl. (2) mit der Belastungscharakteristik Gl. (18) auf die Ebene (σ_3, σ_1) liefert ∞^1 Grenzkurven Gl. (21) gemäß der Änderung des Parameters α ($0 \leq \alpha \leq +1$). Aus den Gl. (26a) und (26b) bekommt man entsprechend Gl. (21), bzw. (21a) ∞^1 Hüllkurven. Da wir im Scheitel der Hüllkurve die Stetigkeit mit mindestens erster stetiger Ableitung verlangen, so hat die Grenzkurve Gl. (21) und die Grenzfläche Gl. (2) ihre Maximumstelle im Gebiet $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (siehe Abb. 1, 5 und 6). In Abb. 5 hat die Grenzkurve von Maximumstelle A bis zur Geraden $\sigma_1 = \sigma_3$: $\sigma'_1 < 0$. Dieser Teil der Grenzkurve liefert die Spannungskreise, die sich in Abb. 6 innerhalb des kleinsten Spannungskreises (der der Krümmungskreis der Hüllkurve im Scheitelpunkt A ist) befinden. Sie stellen ebenso die Grenzzustände dar, obwohl sie mit der Hüllkurve nicht in Berührung stehen. Damit wird die versuchsmäßig oft gefundene Tatsache bestätigt, daß z. B. die zweiachsige Zugbeanspruchung kleiner ist, als die einachsige Zugbeanspruchung (siehe Abschnitt V, A und Abb. 9).

Dann können aus der Form der Hüllkurve die folgenden Eigenschaften über die Form der Grenzfläche festgestellt werden:

1. Jeder Hüllkurve $\tau = \tau(\sigma)$ entspricht im KS $(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)$ eine Raumkurve, die in der Ebene $\sigma_2 = \alpha \sigma_1 + \beta \sigma_3$ ($\alpha + \beta = 1$) liegt, wahrscheinlich symmetrisch zur Geraden $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ verläuft und die nach dem Zuordnungsgesetz $\operatorname{tg}^2 \varphi = \sigma'_1$ ähnlichen Verlauf wie die Hüllkurve hat. Durch die Verbindung aller dieser Raumkurven wird die Grenzfläche $F(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1) = 0$ erhalten.

Diese Grenzfläche dürfte sich also im Gebiete der großen Drücke einem Zylinder mit der Achse $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ asymptotisch nähern. Die Grenzfläche schneidet diese Achse winkelrecht und nur einmal: Bei festen Stoffen im positiven (σ_{sA}), bei kohäsionslosen, sandartigen Massen im negativen Bereich (σ_{qA}). Die Grenzfläche kann den Nullpunkt des KS $(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)$ nicht enthalten, da dieser Punkt den unbelasteten Zustand und keinen Grenzzustand bedeutet. Demnach müßte man auch die durch den Ursprung des KS (σ, τ) gehenden Hüllgeraden für kohäsionslose Massen durch eine stetige und differenzierbare Hüllkurve ersetzen, die die σ -Achse im Druckbereich winkelrecht schneidet. Die Grenzfläche ist (nach außen) konvex, hat also keine Wendelinie. Sie erreicht in einem Punkt des Gültigkeitsbereiches [(nach Gl. (1)] das Maximum: dieser Punkt fällt aus geometrischen Gründen in die Ebene $\sigma_2 = \sigma_3$ der Zugbeanspruchung; er dürfte sich im ersten Oktant oder auf der σ_1 -Achse befinden, was wir aus dem im KS (σ_3, σ_1) aufgetragenen Versuchsergebnissen (vergl. etwa Abb. 15) vermuten. Die Grenzfläche hat wahrscheinlich die Gerade $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ als Symmetrieachse, die aber keine Rotationsachse zu sein braucht.

Unserer Meinung nach ließe sich die Grenzfläche versuchsmäßig vollständig ermitteln. Man müßte die Verdrehungsversuche unter allseitigem

Druck mit Achsial- oder Mantelüberdruck an zylindrischen Körpern (wie Böker⁶), durchführen und die Randschubspannung nach Nádai¹² (S. 91) berechnen: $\tau_a = (\vartheta \cdot dM/d\vartheta + 3M)/2\pi a^3$, worin a der Halbmesser des Zylinders, ϑ Verdrehungswinkel und M Verdrehungsmoment ist. Diese Gleichung scheint weitgehende Gültigkeit zu haben, sowohl für Winkel $\vartheta > 5^\circ$, als auch, wenn die Verkürzung der Zylindererzeugenden berücksichtigt wird. Dies gilt nicht für Gl. (1) von Nádai¹² (S. 90), wo das Drehmoment M in Abhängigkeit von der spezifischen Schiebung γ berechnet ist. Man müßte noch eine Versuchsvorrichtung konstruieren, bei welcher die Reibungsstörungen kleiner werden als bei Böker.⁶ Diese Versuche könnte man außer mit festen Stoffen (wie Gesteine und Metalle) auch mit erdartigen, bindigen oder kohesionslosen Massen durchführen. Wir erwarten nämlich, daß sich der mit Sand ausgefüllte, allseitig auf Druck belastete Gummizylinder noch auf Verdrehung beanspruchen lassen wird. Aus der einmal ermittelten Grenzfläche wird sich der Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung aus der Belastungscharakteristik ergeben. Weiter könnte man die Abhängigkeit der Bruchform vom Spannungszustand eingehend untersuchen und dadurch die Trennung der wahren Grenzkurve $\tau = \tau(\sigma)$ (s. Abb. 14) von der Hüllkurve nach Mohr,¹ die nur die Folge einer formellen Transformation der im KS $(\bar{\sigma}_3, \sigma_1)$ dargestellten Grenzzustände ist, durchführen. Es würde sich ferner eine Möglichkeit der Untersuchung der nichteinhüllbaren Grenzspannungskreise ergeben.

Entgegen der Meinung Mohrs¹ über die Einflußlosigkeit der mittleren Hauptnormalspannung σ_2 wird hier behauptet:

2. Es gibt im allgemeinsten Falle ebenso viel Hüllkurven, wie es Schnittkurven zwischen der Grenzfläche $F(\bar{\sigma}_3, \sigma_2, \sigma_1) = 0$ und Belastungscharakteristik $\sigma_2 = (\sigma_1 - \sigma_3)\alpha + \sigma_3$ durch die Änderung des Parameters α ($0 \leq \alpha \leq +1$) gibt.

Die Anwendungen dieser Ergebnisse werden in den nächsten Abschnitten erfolgen, wobei wir einige Näherungsansätze für die Grenzfläche Gl. (2) untersuchen werden.

V. Näherungsansätze für die Grenzfläche.

Die Grenzfläche wird zuerst in einem KS $(\bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_1)$ untersucht, in welchem die Hauptachsen der Grenzfläche mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Für die Grenzfläche erhält man dadurch eine sehr einfache Gleichung (sog. Achsengleichung), an Hand welcher man leicht überprüfen kann, ob ihr Schnitt mit der Ebene Gl. (18) eine solche Kurve liefert, die der versuchsmäßig ermittelten Hüllkurve verwandt ist. Die zwei Hauptmerkmale der Hüllkurve sind: Sie ist erstens (nach Mohr¹) im Bereich der negativen σ -Achse offen, und zweitens (nach Leon⁸) schneidet sie die σ -Achse unter 90° . Dann wird die Hauptachse der Grenzfläche, die mit der $\bar{\sigma}_1$ -Achse identisch ist, in die Gerade Gl. (19) ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) überführt. Die Transformationsmatrix der Richtungskosinuse lautet

	σ_3	σ_2	σ_1
$\bar{\sigma}_3$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\bar{\sigma}_2$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$+\frac{2}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\bar{\sigma}_1$	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$

(29a)

oder

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - \sigma_3), & \bar{\sigma}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}[(\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_2 - \sigma_3)], \\ \bar{\sigma}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

A. Grenzflächen zweiter Ordnung.

Wir untersuchen hier nur das Rotationsparaboloid; das elliptische Paraboloid werden wir im Abschnitt VI behandeln.

Die Gleichung des Rotationsparaboloides im KS $(\bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_1)$, d. h. in der einfachsten Form, lautet

$$\bar{\sigma}_3^2 + \bar{\sigma}_2^2 + a \cdot \bar{\sigma}_1 = 0, \quad (30a)$$

wobei $a/2$ der Parameter der Hauptschnittparabeln ist. Die Achse $\bar{\sigma}_1$ ist die Hauptachse des Paraboloides, das sich nur im Bereich $\bar{\sigma}_1 < 0$ erstreckt und dessen Scheitel im Nullpunkt liegt. Gl. (30a) entspricht einer Darstellung der Grenzfläche nach Geiringer und Prager¹¹ (S. 316) in der Ebene $(\bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_2)$ des Spannungsdeviators und der senkrecht dazu stehenden Koordinaten des Kugeldeviators, die parallel zur $\bar{\sigma}_1$ sind. Die Belastungscharakteristik ist eine durch die $\bar{\sigma}_1$ -Achse gehende Ebene, deren Schnittspuren mit der Ebene $(\bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_2)$ stellen ein dem Ursprung des KS $(\bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_2)$ enthaltendes Strahlenbüschel dar. Die Hauptschubspannungstheorie liefert nach Geiringer und Prager¹¹ eine zur Ebene $(\bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_2)$ des Spannungsdeviators senkrechte Ebene (Grenzfläche), deren Spur in der Ebene des Spannungsdeviators eine Gerade ist, während sie hier eine in der Ebene der Belastungscharakteristik liegende Gerade liefert, die senkrecht zur Ebene des Spannungseviators steht (siehe eingehender in diesem Abschnitt unter a). Nach einer Verschiebung $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1 - e$ und der Transformation nach Gl. (29) ergibt sich aus Gl. (30a) nach leichter Umformung

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + a \sqrt{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = a \sqrt{3} \cdot e \sqrt{3}. \quad (30b)$$

Die Bedingungen für die Berechnung der Konstanten a und e bekommt man, wenn wir die einachsige Druck- ($\sigma_2 = \sigma_1 = 0, \sigma_3 = -\sigma_q$) und Zugbeanspruchung ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \sigma_1 = +\sigma_s$) in Gl. (30b) einführen; dann erhält man

$$2\sigma_q^2 - a \sqrt{3} \cdot \sigma_q = a \sqrt{3} \cdot e \sqrt{3}, \quad (31a)$$

$$\text{und} \quad 2\sigma_s^2 + a \sqrt{3} \cdot \sigma_s = a \sqrt{3} \cdot e \sqrt{3}, \quad (31b)$$

woraus folgt:

$$a \sqrt{3} = 2(\sigma_q - \sigma_s) = 2(c - 1)\sigma_s, \quad a \sqrt{3} \cdot e \sqrt{3} = 2\sigma_q \sigma_s = 2c\sigma_s^2, \quad (32a, b)$$

wobei nach Leon⁸ mit $c = \sigma_q/\sigma_s$ das Verhältnis zwischen der einachsigen Druck- und Zugfestigkeit, bzw. zwischen der Quetsch- (Fließspannung bei Druckversuch) und Streckgrenze (Fließspannung bei Zugversuch) bezeichnet wird. Die Gleichung der Grenzfläche (30b) lautet mit Gl. (32a) und (32b)

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 2(c - 1)\sigma_s(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) &= 2c\sigma_s^2 \\ \text{mit der Belastungscharakteristik:} \end{aligned} \right\} \quad (30c)$$

$$\sigma_2 = \alpha \sigma_1 + \beta \sigma_3, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Gl. (30c) kann man in der Form schreiben:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 (1 - \alpha\beta) + (c - 1)\sigma_s[\sigma_1(1 + \alpha) + \sigma_3(1 + \beta)] = c\sigma_s^2, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (30)$$

Mit der Änderung des Parameters α ergibt sich aus Gl. (30) im KS (σ_3, σ_1) eine Schar von Grenzkurven. Differenziert man Gl. (30) nach Parameter α , so bekommt man eine Einhüllende aller dieser Grenzkurven, die wir mit $\max F$ bezeichnen wollen. Aus der Differentiation nach α folgt aus Gl. (30)

$$\max \alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sigma_q - \sigma_s}{\sigma_1 - \sigma_3} \right) \quad (33a)$$

und aus Gl. (33a) und (30) bekommt man die Gleichung der Einhüllenden

$$\max F \equiv (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 2(c - 1)\sigma_s(\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{1}{3}(c + 1)^2 \sigma_s^2 = 0. \quad (33)$$

für σ und τ sind in Tab. 1 zusammengestellt. Diese Hüllkurven rechtfertigen unsere Behauptung 2 und sprechen allgemein gegen die Meinung Mohrs.¹ Außerdem scheint es, teilweise im negativen und zur Gänze im positiven Bereich der σ -Achse, durchaus möglich zu sein, besonders wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Grenzfläche Gl. (2), daß auch die nichteinhüllbaren Spannungskreise (d. h. die Gebiete mit $\sigma_1' < 0$ in Abb. 8) den auf die Grenze der Beanspruchung liegenden Spannungszuständen entsprechen. Deshalb sind die obengenannten Größen σ_{sA} und σ_{sV} prinzipiell, d. h. ohne Rücksicht, ob die Grenzkurve einem wirklichen Material entspricht, durchaus annehmbar, obwohl $\sigma_1' < 0$ (s. Tab. 1). Wie aus Abb. 8 und 9 ersichtlich ist, verbindet die Parabel von Leon⁸ die einachsige Zug- und Druckfestigkeit (Punkte C_2 und B_1); zwischen diesen zwei Versuchen ergibt sie die mittleren Werte sowohl für σ_1 und σ_3 , als auch für σ und τ .

Bei der Scherfestigkeit τ_s muß man die Belastungscharakteristik fallweise berechnen. Wegen $\sigma = 0$ und $\sigma_2 = 0$ bekommt man aus Gl. (26 a) und (18): $\sigma_1' = \beta/\alpha$. Aus Gl. (30) mit $c = 2$ ergibt sich dann: $\alpha = 0,730$, $\beta = 0,270$; $\sigma_1 = 0,510 \sigma_s$, $\sigma_3 = -1,379 \sigma_s$. Die Scherfestigkeit erhält man aus Gl. (26 b) zu: $\tau_s = \pm \sqrt{-\sigma_1 \sigma_3} = \pm 0,839 \sigma_s$.

Wir haben noch die Gültigkeitsbereiche (wie bei Leon⁸) der Gl. (30), bzw. Gl. (30c) zu untersuchen. Die Gültigkeit der Grenzkurve Gl. (30) hört auf, wenn ihre Maximumstelle (Punkt A in Abb. 5) auf die Ordinate σ_1 fällt. Wir nehmen an, daß die Grenzkurve $\alpha = 0$ im KS (σ_3, σ_1) die σ_1 -Achse nur mit $\sigma_1' > 0$ oder mit $\sigma_1' = 0$ schneiden darf, sonst wäre mit $\sigma_1' < 0$ an dieser Stelle die Schubspannung τ in der Gleitfläche nach Gl. (26 b) imaginär. Im Extremfalle muß also für $\sigma_1' = 0$ die Spannung $\max \sigma_3 = 0$ sein. Aus Gl. (30) erhält man

$$\sigma_1' = \frac{2(\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \alpha\beta) - (c-1)\sigma_s(1 + \beta)}{2(\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \alpha\beta) + (c-1)\sigma_s(1 + \alpha)}, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (34)$$

Für $\sigma_1' = 0$ bekommt man aus Gl. (34)

$$\max \sigma_1 - \max \sigma_3 = \frac{(c-1)\sigma_s}{2} \cdot \frac{1 + \beta}{1 - \alpha\beta}, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (34a)$$

Aus Gl. (34a) und (30) ergibt sich

$$\max \sigma_3 = \frac{(c-1)\sigma_s}{2 + \alpha + \beta} \left[\frac{c}{(c-1)^2} - \frac{(1 + \beta)(3 + 2\alpha + \beta)}{4(1 - \alpha\beta)} \right], \quad \alpha + \beta = 1. \quad (34b)$$

Aus Gl. (34b) für $\max \sigma_3 = 0$ ergibt sich

$$c \leq \frac{1}{2K} (2K + 1 + \sqrt{4K + 1}) \text{ mit } K = \frac{(1 + \beta)(3 + 2\alpha + \beta)}{4(1 - \alpha\beta)}, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (35)$$

Gl. (35) zeigt, wie der Gültigkeitsbereich von der Belastungsart abhängt: für Zugversuche ($\alpha = 0, \beta = 1$) ergibt er sich mit $c \leq 2$. Diese Untersuchung über den Gültigkeitsbereich bezieht sich schließlich nur auf die Zugversuche, da für $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ immer $\sigma_1 = +\sigma_s$ sein muß, und zwar (näherungsweise) für $\sigma_1' \geq 0$! (s. Versuche in Abb. 15), womit nur in geometrischem Sinne gesagt ist, daß der Spannungskreis für den einachsigen Zugversuch immer die reelle Hüllkurve berühren muß. Die Gültigkeitsbereiche von den anderen Belastungsarten (Druckversuche $c \leq 2,38$, Verdrehungsversuche $c \leq 1,93$) lassen wir außer acht, da sie auf der Stelle: $\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \sigma_1 > 0$ und weiter im Zugbereich auch die Grenzspannungen mit imaginären Hüllkurven ($\sigma_1' < 0$) haben können. Wie die Grenzkurve für $c > (2K + 1 + \sqrt{4K + 1})/2K$ verlaufen soll, werden wir in Abschnitt VI untersuchen.

Wir wollen jetzt Gl. (30) und (30c) mit einigen bekannten Bruch- und Fließbedingungen vergleichen.

Spannungen	Spannungen σ_1 und σ_3												
	Zugversuche ($\alpha = 0, \beta = 1$)						Druckversuche ($\alpha = 1, \beta = 0$)					Verdrehung	
	σ_1	σ_3	σ_1'	σ	τ	$\times \sigma_s$	σ_1	σ_3	σ_1'	σ	τ	$\times \sigma_s$	
	$\times \sigma_s$			$\times \sigma_s$			$\times \sigma_s$			$\times \sigma_s$			
Zug	+ 1	0	0	+ 1	0	+ 0,7321	0	0,3170	+ 0,5559	\pm 0,3130	$\sigma_{sV} =$ + 0,9148	0	
Druck	0	— 2,7321	0,5359	— 0,9533	\pm 1,3023	0	— 2	0,5	— 0,6667	\pm 0,9428	0	— 2,9148	
Verdrehung	+ 0,8431	— 0,8431	0,3139	+ 0,4403	\pm 0,7191	+ 0,5931	— 0,5931	0,3939	+ 0,3097	\pm 0,5058	$\tau_v =$ + 0,8165	$\tau_v =$ — 0,8165	
Alls. Zug	+ 0,6667	+ 0,6667	< 0	$\sigma_{sA} =$ + 0,6667	—	+ 0,6667	+ 0,6667	< 0	—	—	+ 0,6667	+ 0,6667	
Maximum	+ 1	0	0	+ 1	\pm 0	+ 0,75	+ 0,25	0	+ 1	\pm 0	+ 0,9167	— 0,0833	

a) Die Gestaltänderungstheorie (vgl. Mises¹⁹ und Hencky²⁵) ergibt die Fließbedingung, die mit Gl. (30c) für $c = 1$ identisch ist:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_s^2. \quad (36)$$

Gl. (36) stellt im KS ($\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$) bekanntlich einen Zylinder mit der Rotationsachse Gl. (19) dar. Diese Theorie stimmt mit Versuchen mit den plastischen Stoffen (wie z. B. weiches Eisen) überein, wie dies Roß und Eichinger⁹, und Lode¹⁰ nachgewiesen haben. Mit der Belastungscharakteristik Gl. (18) ergibt sich aus Gl. (36)

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma_s}{\sqrt{1 - \alpha\beta}}, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (36a)$$

Eine ähnliche Gleichung hat auch Lode¹⁰ erhalten: $\sigma_1 - \sigma_3 = 2 \sigma_s / \sqrt{3 + \mu^2}$ mit $-1 \leq \mu \leq +1$. Für die Belastungsart „Verdrehungsversuche“ ($\alpha = \beta = 1/2$) erhält man aus Gl. (36a)

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2 \sigma_s}{\sqrt{3}}, \quad (37a)$$

woraus man für $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_v$ die Verdrehungsfestigkeit (Drillfestigkeit)

$$\tau_v = \sigma_s / \sqrt{3} = 0.577 \sigma_s \quad (37b)$$

erhält. Die Zug- ($\alpha = 0$) und Druckversuche ($\alpha = 1$) liefern die gleiche Fließbedingung

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s. \quad (38)$$

Aus Abb. 10a und 10b ist ersichtlich, daß die verschiedenen Belastungsarten Gl. (37a) und (38) die verschiedenen Hüllkurven (hier Hüllgeraden) und die verschiedenen Grenzkurven (hier Grenzgeraden) liefern. Der Schnitt der Grenzfläche Gl. (36) mit der Ebene (σ_3, σ_1) ergibt sich für $\sigma_2 = 0$ und wird in Abb. 10a durch die Ellipse

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_s^2 \quad (36b)$$

dargestellt. Wegen des ebenen Spannungszustandes ($\sigma_2 = 0$) ist nur der voll ausgezogene Teil BDC der Ellipsen in Abb. 10a und 10b gültig. Der strichliert gezeichnete Teil ist nur im Falle $\sigma_2 \neq 0$ möglich; dies außerdem mit der Begrenzung: $\sigma_1 > \sigma_3$ und $\sigma_1' \geq 0$, was dem Kurventeil ACD in Abb. 10a und 10b entspricht (vgl.²⁰ Abschnitt III, e). Demnach enthält der Kurventeil BDC alle Belastungsarten von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 1$, die mit Gl. (36b) funktional verbunden sind. Die Spur der Ebene Gl. (18) im KS (σ_3, σ_1) bekommt man für $\sigma_2 = 0$ zu: $\sigma_1 = -\frac{\beta}{\alpha} \sigma_3$; dies ist im KS (σ_3, σ_1) eine Gerade, die durch den Ursprung geht, z. B. die Gerade OD in Abb. 10a.

²⁵ H. Hencky: Z. angew. Math. Mech. 4, 323 (1924).

$c = 2$.

nach Gl. (30); σ und τ nach Gl. (26a, b), σ_1' nach Gl. (34).								max F nach Gl. (33)				
versuche ($\alpha = \beta = \frac{1}{2}$)			Theorie von Leon ($\alpha = \beta = 0$)									
σ_1'	σ	τ	σ_1	σ_3	σ_1'	σ	τ	σ_1	σ_3	σ_1'	σ	τ
	$\times \sigma_s$		$\times \sigma_s$			$\times \sigma_s$		$\times \sigma_s$			$\times \sigma_s$	
< 0	—	—	+1	0	0,3333	+0,75	$\pm 0,4330$	+1	0	0	+1	$\pm 0'$
0,4891	-0,9574	$\pm 1,3690$	0	-2	0,6	-0,75	$\pm 0,9683$	0	-3	0,5	-1	$\pm 1,4142$
0,2404	+0,5000	$\pm 0,6455$	+0,7071	-0,7071	0,4776	+0,2500	$\pm 0,6614$	+0,8661	-0,8661	0,2880	+0,5000	$\pm 0,7072$
< 0	—	—	+1	+1	< 0	—	—	+0,75	+0,75	< 0	—	—
0	+1	0	+1,125	+0,625	0	+1	0	+1	0	0	+1	± 0

Die Grenzkurve ist immer mit der Geraden Gl. (36a) dargestellt, die mit der σ_1 -Achse einen Winkel von 45° einschließt und die durch den Schnittpunkt der Geraden $\sigma_1 = -\frac{\beta}{\alpha} \sigma_3$ mit der Ellipse Gl. (36b) hindurchgeht. Je zwei Belastungsarten werden immer mit einer Grenzgeraden, bzw. mit einer Hüllgeraden dargestellt; eine Ausnahme ist der Punkt D, wo die Grenzgeraden den Verdrehungs- und Scherversuch enthält.

Auf die Unmöglichkeit, die Ellipse des ebenen Spannungszustandes Gl. (36b) als eine einheitliche Grenzkurve zu behandeln, hat der Verfasser²⁰ schon hingewiesen.

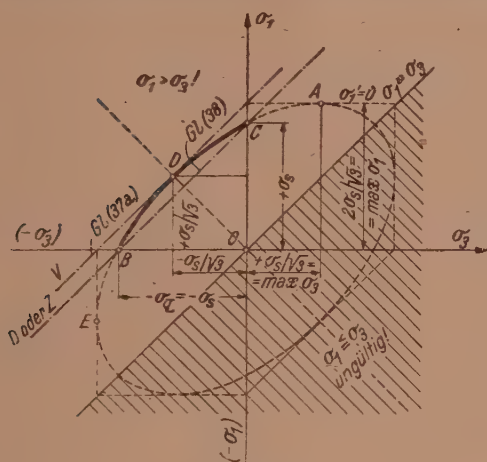


Abb. 10 a.

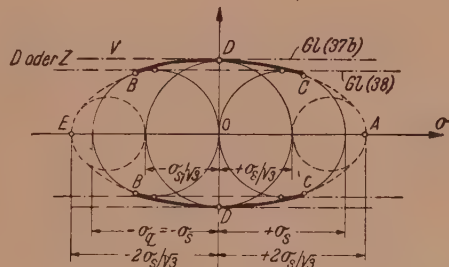


Abb. 10 b.

Die Versuche von Roß und Eichinger⁹ mit Hohlzylindern aus S. M.-Stahl auf Zug, Druck und Torsion ohne und mit Innendruck sind in diesem Sinne auszuwerten. Ihre Behauptung: „Eine Hüllkurve in Mohrscher Darstellung ist nicht möglich“, ist eine unbestrittene Wahrheit, da in Wirklichkeit mehrere Hüllkurven (bzw. Hüllgeraden) im oben beschriebenen Sinne notwendig sind, um alle Spannungskreise entsprechend zu verbinden.

b) Hencky²⁶ untersucht die Grenzbeanspruchung des Materials in einem ebenen KS (p_m , τ_r), wobei

$$p_m = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad \text{und} \quad \tau_r^2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (39a, b)$$

die Invarianten des Spannungsdeviators sind: p_m ist die mittlere Spannung und

²⁶ H. Hencky: Stahlbau 16, 95 (1943).

τ_r eine Größe, die nur von der Gestaltänderung abhängt und die man aus Gl. (12): $J_2 + 3 p_m^2 = \tau_r^2$ erhält. Aus Gl. (30c) und (39a), (39b) ergibt sich

$$\tau_r^2 + (c - 1) \sigma_s \cdot \dot{p}_m = c \sigma_s^2 / 3. \quad (40)$$

Gl. (40) stellt im KS (p_m, τ_r) eine Parabel dar, die für $c = 1$ in die Schubspannungstheorie mit $\tau_r = \tau_v = \sigma_s / \sqrt{3}$ übergeht, was mit Gl. (37b) übereinstimmt. Damit ist die Annahme Henckys²⁶ über den annähernd parabolischen Verlauf der Bruchkurve mit Gl. (40) bestätigt. Er teilt die Grenzkurve $\tau_r = \tau_r(p_m)$ — zwar für die Metalle — in eine sich vorwiegend im Zugbereich befindliche Bruchkurve und in eine mit p_m -Achse parallele Gerade $(\tau_r)_{p_0} = \text{konst.}$ (Plastizitätsbereich), die vom Anteil p_m unabhängig ist und die sich größtenteils oder ganz im Druckbereich befindet.

In seinem Bild 2 hat Hencky²⁶ eine gegen die negative p_m -Achse geschlossene Grenzkurve gezeichnet, die nach seiner Auffassung für allseitig gedrückte, poröse Stoffe gilt. Da hier für die Bruchbeurteilung nicht die vom Manometer abgelesenen, sondern die am Rande der Kerbe oder Pore herrschenden Spannungen in Betracht kommen können, so muß auch diese Grenzkurve gegen die negative p_m -Achse offen sein. — Unvereinbar ist noch bei Hencky²⁶ seine Meinung, daß es möglich sei, die Bruchtheorie hypothesenfrei und ohne den Versuchen im geringsten vorzugreifen, aufzustellen.

Hencky²⁶ hat die kubische Invariante vernachlässigt, was auf die Näherung der Grenzflächen zweiter Ordnung führt. Obwohl wir im Teil B dieses Abschnittes die Grenzflächen höherer Ordnung werden verlangen müssen, so scheint die Annahme über die physikalische Bedeutungslosigkeit der kubischen Invariante annehmbar zu sein. Wir haben das aus der Gleichung

$$A q_r^3 + \tau_r^2 + B p_m = C \quad (40a)$$

festgestellt, wobei

$$q_r^3 = \sigma_1^2 (\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2^2 (\sigma_3 + \sigma_1) + \sigma_3^2 (\sigma_1 - \sigma_2) + 2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (41)$$

die reduzierte kubische Invariante nach Gl. (12)

$$-J_3 = 3 p_m (\tau_r^2 - 3 p_m^2) + q_r^3.$$

ist. Die Konstanten A, B, C kann man nach Abschnitt VI/1 aus der Bedingung für die Zerreißgrenzfläche berechnen. Auch die nichtreduzierte kubische Invariante $J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ trägt nicht zur Besserung der Lösung bei.

Da Gl. (39a) und (39b) die Transformationsgleichungen vom KS ($\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$) im KS (p_m, τ_r) darstellen, so ist es durchaus möglich, aus einer Grenzfläche Gl. (2), die sowohl analytisch als auch durch die Versuchsergebnisse gegeben sein kann, die entsprechende Grenzkurve $\tau_r = \tau_r(p_m)$ zu erhalten. Die Erforschung der Hüllkurve $\tau = \tau(\sigma)$ hat den Vorteil, daß diese auch über die Art des Bruches und über die Bruchwinkel Auskunft geben kann.

c) Die Hüllparabel von Leon⁸ liefert eine Grenzbedingung, die man auch aus Gl. (30) für $\alpha = \beta = 0$ (was die Bedingung $\alpha + \beta = 1$ nicht erfüllt) bekommt:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (c - 1) \sigma_s (\sigma_1 + \sigma_3) = c \sigma_s^2. \quad (42)$$

Mit $\alpha = \beta = 0$ erhält man aus Gl. (35) die Gültigkeit der Gl. (42) mit $c \leq 3$. Die Parabel Gl. (42) ist in Abb. 8 und die entsprechende Hüllkurve in Abb. 9 strichliert gezeichnet. Sie verbindet den einachsigen Zug- und Druckversuch. In diesem Bereich nimmt Gl. (42) die mittlere Stellung an, während sie im Bereich $\sigma_3 < 0, \sigma_1 < 0$ die auf der sicheren Seite liegenden Ergebnisse liefert.

Leon²⁸ hat noch eine Bruchbedingung aufgestellt, die auch die mittlere Hauptnormalspannung berücksichtigt; sie lautet

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (c - 1) \sigma_s (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = c \sigma_s^2. \quad (43)$$

kappafläche zu nehmen. Ihre Gleichung erhält man aus der Ähnlichkeit mit der Gl. (44) im KS $(\bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_1)$ zu

$$(\bar{\sigma}_1 - b)^2 = \frac{\bar{\sigma}_2^4 + \bar{\sigma}_3^4}{a^2 - (\bar{\sigma}_2^2 + \bar{\sigma}_3^2)}. \quad (46)$$

Gl. (46) hat einen asymptotischen Kreiszylinder, der als Hauptachse die Gerade $\bar{\sigma}_1$ hat. Dieser Kreiszylinder entspricht im KS (σ, τ) zwei zur σ -Achse parallelen Geraden, womit die Forderung Kármáns⁵ befriedigt ist. Nach der Transformation mit Gl. (29) erhält man aus Gl. (46)

$$\left[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - b \sqrt{3} \right]^2 = \frac{[(\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_2 - \sigma_3)]^4 + 9(\sigma_1 - \sigma_3)^4}{4 \{ 3a^2 - [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \}} \quad (47)$$

mit $\sigma_2 = \alpha \sigma_1 + \beta \sigma_3, \quad \alpha + \beta = 1.$

Aus Gl. (47) erhält man die Bedingungen für die Berechnung der Konstanten a und b wie folgt:

$$\text{aus } \sigma_2 = \sigma_1 = 0 \dots \sigma_3 = -\sigma_a \text{ folgt: } \sigma_a + b \sqrt{3} = \sqrt{\frac{10 \sigma_a^4}{4(3a^2 - 2\sigma_a^2)}}, \quad (48a)$$

$$\text{aus } \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \dots \sigma_1 = +\sigma_s \text{ folgt: } \sigma_s - b \sqrt{3} = -\sqrt{\frac{10 \sigma_s^4}{4(3a^2 - 2\sigma_s^2)}}. \quad (48b)$$

Addiert man beide Gl. (48a) und (48b), so bekommt man mit $c = \sigma_a/\sigma_s$

$$(c + 1) \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{c^2}{\sqrt{3 \left(\frac{a}{\sigma_s} \right)^2 - 2c^2}} - \frac{1}{\sqrt{3 \left(\frac{a}{\sigma_s} \right)^2 - 2}}. \quad (49)$$

Statt Gl. (49) in einem Polynom achten Grades in a/σ_s zu entwickeln, kann man sie unmittelbar, aber nur für je einen speziellen Wert von c , auswerten. Z. B. für $c = 2$ ergibt sich der Wert $a = 1,935 \sigma_s$ und aus einer von Gl. (48) $b \sqrt{3} = 1,520 \sigma_s$. Gl. (47) kann man in der Form schreiben

$$[\sigma_1(1 + \alpha) + \sigma_3(1 + \beta) - b \sqrt{3}]^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^4 [9 + (\alpha - \beta)^4]}{4 [3a^2 - 2(\sigma_1 - \sigma_3)^2(1 - \alpha\beta)]}. \quad (50)$$

Aus Gl. (50) ergibt sich z. B. der Wert für den Umschließungsdruckversuch für $\alpha = 0$, $\beta = 1$ und mit den oberen Werten von a und b : $\sigma_{qu} = \text{rund } 2,19 \sigma_s = 1,095 \sigma_a$, ist also um rund 10% höher als die einachsige Druckfestigkeit.

Die Rotationskappafläche Gl. (47) kann man für $c = 1$ nicht untersuchen. Wenn wir nämlich in Gl. (49) mit reellen und endlichen Größen rechnen wollen, so muß $a/\sigma_s > c \sqrt{2}/\sqrt{3}$ und wegen der zweiten Gliedes auch $c > 1$ sein.

C. Veranschaulichung der Grenzfläche. Die wahre Grenzkurve $\tau = \tau(\sigma)$ der Zugversuche.

Um den Verlauf einer Grenzfläche ungefähr zu veranschaulichen, sind in Tab. 2 die Ergebnisse der Zugversuche von Böker⁶ und der Druckversuche von Kármán⁵ auf Bruchgrenze (bezogen auf den ursprünglichen Querschnitt) zusammengestellt. Die letzte Zeile bei Böker ist näherungsweise mit $\sigma_{qu} = 1,3 \cdot \sigma_a = 1,3 \cdot 1360 = 1770 \text{ kg/cm}^2$ (mit $\sigma_a = 1360 \text{ kg/cm}^2$ nach Kármán) ergänzt. Die Ergebnisse sind zuerst in Abb. 12 im KS (σ_3, σ_1) gezeichnet, wobei die Isohypsenteilung mit $\sigma_1 = 250 \text{ kg/cm}^2$ angenommen ist. Aus Abb. 12 ist in Abb. 13a die Grenzfläche veranschaulicht: die Isohypsen verlaufen parallel zur waagrechten Ebene (σ_3, σ_2) ; sie sind nur im nach Gl. (1) gültigen Bereich gezeichnet; im Bereich des wachsenden Druckes sind die immer stärker werdenden Gefälle der Grenzfläche durch die Anhäufung der Isohypsen deutlich erkennbar. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Grenzfläche keine

Rotationsfläche ist (s. Abb. 13 b), und zwar rechnerisch durch die Ermittlung des Abstandes $a = (\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{\frac{2}{3}(1 - \alpha\beta)}$ eines Punktes der Grenzfläche von der Geraden $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ und graphisch durch die Umlegung der Ebenen Gl. (18) in der Zeichen-

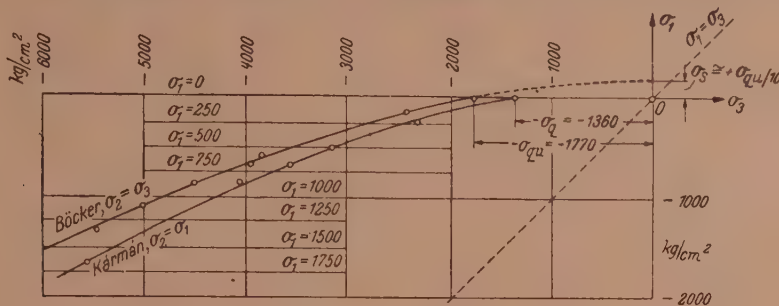


Abb. 12.

ebene. In Abb. 13 b sind die Grenzkurven nach unserer Vermutung mit dem strichliert gezeichneten symmetrischen Verlauf und einer zur Achse $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ senkrechten Tangentialebene im Scheitel ergänzt.

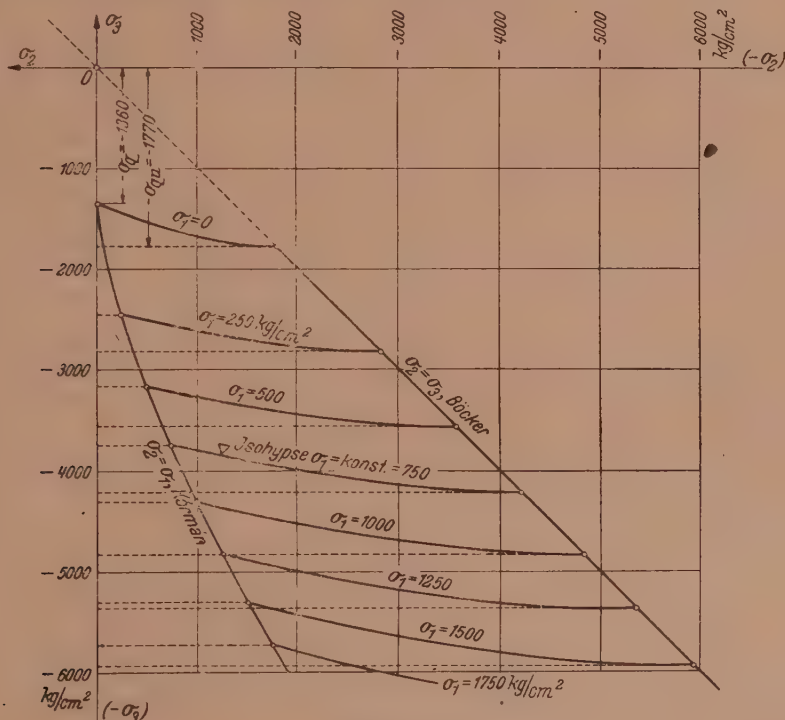


Abb. 13 a.

In Tab. 3 sind die Ergebnisse der Zugversuche von Roß und Eichinger⁷ mit Marmor I mit entsprechendem Winkel φ und der Druckversuche, bezogen auf den effektiven, verformten Bruchquerschnitt, zusammengestellt (hier ist der Winkel φ um $\frac{1}{2}$ kleiner als jener von Roß und Eichinger⁷ und befindet sich zwischen der Normalen der Bruchfläche und der Spannung σ_1). In Abb. 14 sind die Hüllkurven für Druck- ($\sigma_2 = \sigma_1$) und Zugversuche ($\sigma_2 = \sigma_3$) nach den Angaben aus Tab. 3 gezeichnet. Die vollausgezogene Kurve $\tau = \tau(\sigma)$ in Abb. 14 ist aus dem Gedanken entstanden, daß die aus

Tab. 2.

Böker		Kármán	
$\sigma_2 = \sigma_3$	σ_1	$\sigma_2 = \sigma_1$	σ_3
kg/cm ²			
5480	1320	1650	5550
5020	1080	845	4055
4510	850	685	3565
3955	665	500	3150
3850	595	235	2335
2420	150	0	1360
1770	0		

Tab. 3.

$\sigma_2 = \sigma_3$	σ_1	φ	$\sigma_2 = \sigma_1$	σ_3
atm.			atm.	
0	+ 127	0°	— 1000	— 4020
700	+ 80	0°	— 500	— 2670
900	+ 60	5°	— 240	— 1810
1200	+ 10	8°	— 75	— 1285
1400	— 43	19°	0	— 934
1500	— 75	17°		
2175	— 240	23°		

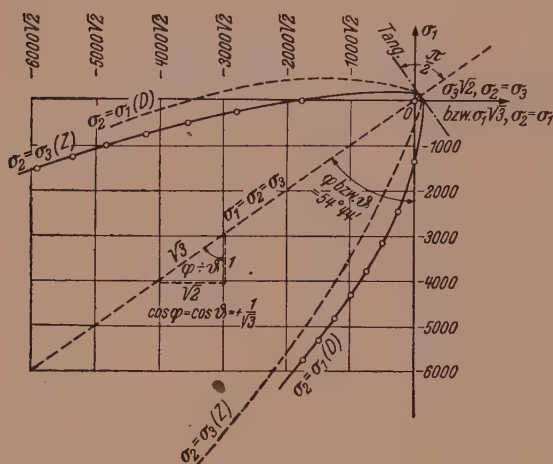


Abb. 13b.

(21a) durch die Ebene (σ, τ) ist (s. Abb. 7a). Dieser Punkt ist der Brennpunkt der Hüllkurve; er sollte der Ausgangspunkt der wahren Grenzkurven $\tau(\sigma)$ für

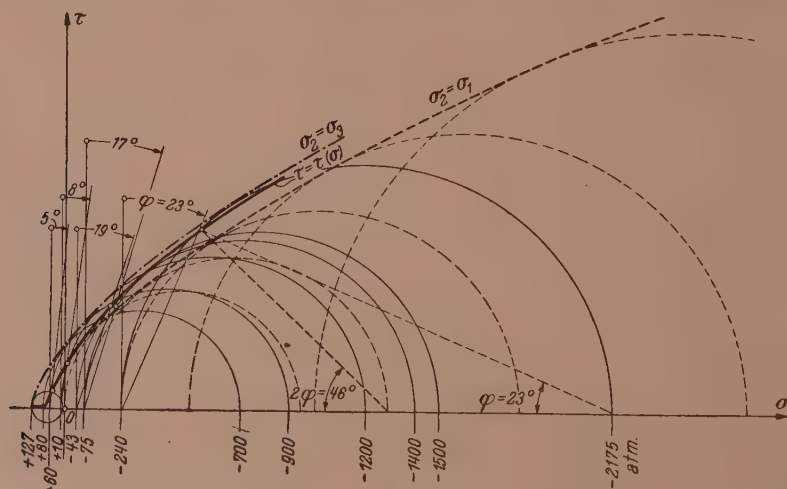


Abb. 14.

alle Belastungsarten (α) sein. Die aus Druckversuchen ($\sigma_2 = \sigma_1$) gemessenen Winkel weichen deshalb nur wenig von denjenigen nach der Hüllkurve ermittelten ab, da

den Versuchen entnommenen Bruchwinkel φ , die — aufgetragen auf die Spannungskreise über $(\sigma_1 - \sigma_3)$ — allein und einzig die wahre Grenzkurve $\tau = \tau(\sigma)$, d. h. die wahre Normalspannung σ und Schubspannung τ in der Bruchfläche bestimmen können. Da die Kurve $\tau = \tau(\sigma)$ im Druckbereich nicht viel von der Hüllkurve für Zugversuche $\sigma_2 = \sigma_3$ abweicht, deutet sie damit den Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung σ_2 an. Im positiven Bereich der σ -Achse geht sie allmählich vom Trenn- zum Gleitbruch über, da der Winkel φ von Null aus zunimmt. Sie müßte die σ -Achse im Punkt σ_{sA} schneiden, wo der Durchdringungspunkt der Grenzkurve Gl.

der Belastungsfall σ_{ss} (zweiachsiger Zug) in der Druckbeanspruchung enthalten ist, wobei σ_{ss} , besonders für spröde Stoffe, nicht viel von σ_{sA} abweichen dürfte. Deshalb braucht die Hüllkurve mit der Grenzkurve $\tau = \tau(\sigma)$ nicht identisch zu sein. Außerdem ergibt sich die Hüllkurve aus einer rein formellen (mathematischen) Transformation der Grenzkurve $\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_3)$ und braucht mit den wirklichen Spannungen in der Gleitfläche und der Bruchform nichts zu tun zu haben.

VI. Fließ- und Zerreißgrenzfläche; die Gültigkeitsgebiete des Grenzflächen.

1. Nádaï¹² unterscheidet, wie schon erwähnt wurde, die zwei großen Gruppen von Grenzflächen: die Fließ- und Zerreißgrenzfläche. Die erste bezieht sich auf die dehnbaren und die zweite auf die spröden Stoffe. Da bekanntlich jedes Material eine andere Hüllkurve, bzw. — gemäß der Behauptung 1 — eine andere Grenzfläche hat und da — wie Roß und Eichinger⁷ durch die Versuche und Leon⁸ theoretisch mit

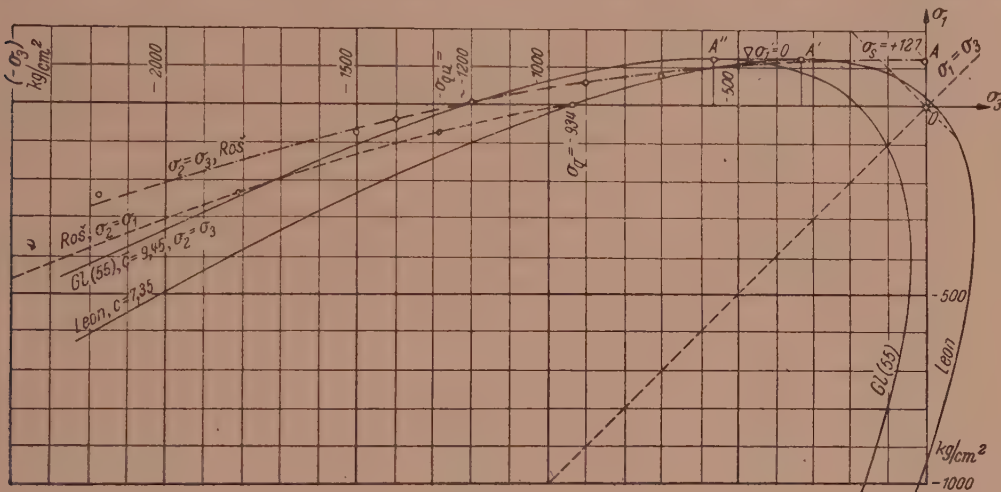


Abb. 15.

Hüllparabel nachgewiesen haben — bei einem und demselben Material der Übergang vom Gleit- zum Trennbruch vom Spannungszustand abhängt, so erscheint diese Unterteilung überflüssig zu sein. Erst die mathematische Behandlung dieses Problems benötigt und definiert diese zwei Gruppen von Grenzflächen.

Leon⁸ hat diese zwei Gruppen theoretisch mit der Forderung zum Ausdruck gebracht, daß für alle $c = \sigma_q/\sigma_s \geq 3$ die allseitige Zugfestigkeit im Raume ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \equiv \sigma_{sA}$) gleich der einachsigen Zugfestigkeit σ_s ($\sigma_s = \sigma_{sA}$) sein muß. Diese Hilfsmaßnahme erscheint im KS (σ, τ) annehmbar zu sein, zerfällt aber im KS (σ_3, σ_1) in zwei Grenzkurven: in eine Parabel und in eine Gerade $A'A$ mit der Gleichung $\sigma_1 = +\sigma_s$ (s. Abb. 15); sie haben den Punkt A' gemeinsam. Zwischen den Punkten A' und A ist die Grenzkurve weder eindeutig noch stetig, womit die der Grenzfläche Gl. (2) entsprechenden Voraussetzungen nicht befriedigt sind. In Abb. 15 ist die Parabel nach der Theorie von Leon⁸ mit $c = 7,35$ gezeichnet; dieser Wert entspricht dem Marmor I von Roß und Eichinger,⁷ dessen weitere Versuchspunkte in Abb. 15 nach der Tab. 3 aufgetragen sind. Sie zeigen einen allmählichen Übergang zur waagrechten Tangente im Punkt A ($\sigma_1 = +\sigma_s$).

Wie aus Abb. 15 ersichtlich ist, liefert die Gerade $A'A$ eine gute Näherung; sie stellt die Unabhängigkeit der Zerreißfestigkeit vom Spannungszustand dar. Die von uns aus Gl. (27b) abgelesene Bedingung $\sigma_1' \geq 0$ ist hier mit $\sigma_1' = 0$ befriedigt. Es wäre für die verschiedenen Berechnungen (z. B. für die Berechnung des plastischen

Körpers) sehr notwendig, wenn die Grenzkurve $F(\sigma_3, \sigma_1) = 0$ einen stetigen und eindeutigen Verlauf bis zum Punkt A hätte, wie dies die Versuchspunkte in Abb. 15 zeigen.

Demnach haben wir es mit einer Zerreißgrenzfläche dann zu tun, wenn die Grenzfläche ein Maximum (aus $\sigma_1' = 0$) mit dem Wert $\max \sigma_1 = +\sigma_s$ an der Stelle $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ hat. Aus Gl. (27b) ergibt sich dann wegen $\operatorname{tg}^2 \varphi = \sigma_1' = 0$ der Gleitwinkel $\varphi = 0^\circ$, d. h. ein Trenn- oder Zerreißbruch. Die Fließgrenzfläche kann man mathematisch definieren: an der Stelle $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = +\sigma_s$ ist $\sigma_1' > 0$, daher auch der Gleitwinkel $\varphi > 0$; d. h. der einachsige Zugversuch liefert einen Gleitbruch.

Mit der Aufstellung einer Zerreißgrenzfläche werden wir weniger Erfolg haben als mit den bis jetzt aufgestellten Grenzflächen, die zu den Fließgrenzflächen gehört und die gemäß ihren c -Werten die Gültigkeit mit dem Beginn der Zerreißgrenzfläche verloren haben.

2. Als erstes Beispiel nehmen wir das Rotationsparaboloid Gl. (30b). Statt sich an den oben beschriebenen, idealen Fall ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1' = 0$, $\max \sigma_1 = +\sigma_s$) zu halten, verlangen wir, daß das Rotationsparaboloid für irgendeinen Wert $\max \sigma_2 = \max \sigma_3$ die Ebene $\max \sigma_1 = +\sigma_s$ berühren soll. Damit lauten hier die Bestimmungsstücke: $a/\sqrt{3}$, $e/\sqrt{3}$ und $\max \sigma_2 = \max \sigma_3$. Die erste Bestimmungsgleichung ergibt sich aus Gl. (30b) mit $\partial \sigma_1 / \partial \sigma_3 = 0$, $\max \sigma_1 = +\sigma_s$ und $\max \sigma_2 = \max \sigma_3$ zu

$$2(\sigma_s - \max \sigma_3) = a/\sqrt{3}. \quad (51a)$$

Mit Gl. (51a), $\max \sigma_1 = +\sigma_s$ und $\max \sigma_2 = \max \sigma_3$ bekommt man aus Gl. (30b) die zweite Bestimmungsgleichung

$$2\sigma_s + \max \sigma_3 = e/\sqrt{3}. \quad (51b)$$

Als dritte Bestimmungsgleichung könnte man Gl. (31a) nehmen. Aus Gl. (51a) (51b) und (31a) erhält man: $\max \sigma_3 = -\frac{1}{2}(\sigma_q + \sigma_s) + \frac{1}{2}\sqrt{3(3\sigma_s - \sigma_q)(\sigma_q + \sigma_s)}$ woraus man sieht, daß $\max \sigma_3$ für $c > 3$ imaginär wird, d. h. daß das Rotationsparaboloid für $c > 3$ die σ_3 -Achse nicht mehr schneidet. Mit der Grenze $c = 3$ ist uns nicht viel geholfen. Die einzige Belastungsart, die in diesem Falle zu berechnen übrigbleibt, ist die Zugbeanspruchung $\alpha = 0$, $\beta = 1$ mit der Bedingung $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_{qu}$; damit ergibt sich aus Gl. (30b) die dritte Bestimmungsgleichung

$$2\sigma_{qu}^2 - a/\sqrt{3}(2\sigma_{qu}) = a/\sqrt{3} \cdot e/\sqrt{3}, \quad (51c)$$

wobei σ_{qu} die Umschlingungsdruckfestigkeit bedeutet. Aus Gl. (51a), (51b) und (51c) bekommt man

$$\max \sigma_3 = -\frac{1}{2}[2\sigma_{qu} + \sigma_s - \sqrt{3\sigma_s(4\sigma_{qu} + 3\sigma_s)}] = -\frac{1}{2}[2\bar{c} + 1 - \sqrt{3(4\bar{c} + 3)}]\sigma_s, \quad (52)$$

$$a/\sqrt{3} = 2\sigma_{qu} + 3\sigma_s - \sqrt{3\sigma_s(4\sigma_{qu} + 3\sigma_s)} = [2\bar{c} + 3 - \sqrt{3(4\bar{c} + 3)}]\sigma_s, \quad (53)$$

$$e/\sqrt{3} = \frac{1}{2}[3\sigma_s - 2\sigma_{qu} + \sqrt{3\sigma_s(4\sigma_{qu} + 3\sigma_s)}] = \frac{1}{2}[3 - 2\bar{c} + \sqrt{3(4\bar{c} + 3)}]\sigma_s, \quad (54)$$

wobei $\bar{c} = \sigma_{qu}/\sigma_s$ ist.

Mit $\bar{c} = 1200/127 = 9,45$ für Marmor I nach Roš und Eichinger⁷ ist aus Gl. (53) und (54), dann nach Gl. (30b) mit der Belastungscharakteristik Gl. (18) die folgende Grenzbedingung berechnet:

$$2(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 10,84(\sigma_1 + 2\sigma_3) + 26,25\sigma_s^2 = 0. \quad (55)$$

Die Parabel nach der Gl. (55) ist in Abb. 15 gezeichnet; sie liefert für die Zugversuche eine bessere Näherung als die Theorie von Leon.⁸ Ein Nachteil ist, daß man zur Berechnung ihres Verlaufes den Umschlingungsdruckversuch statt den einachsigen Druckversuch durchführen muß.

3. Eine Zerreißgrenzfläche kann man mit einem elliptischen Paraboloid erhalten, deren Gültigkeit aber schon mit $c = 3$ endet. Seine Gleichung im KS ($\bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_1$) lautet

$$\frac{\bar{\sigma}_3^2}{a} + \frac{\bar{\sigma}_2^2}{b} + \bar{\sigma}_1 = 0. \quad (56a)$$

Mit der Verschiebung $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1 - e$ und Transformation nach Gl. (29) ergibt sich

$$3(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \frac{a}{b} [(\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_2 - \sigma_3)]^2 + 2\sqrt{3} a (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 2\sqrt{3} a \cdot e \sqrt{3}. \quad (56)$$

Für $\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_2} = 0$ muß $\max \sigma_3 = \max \sigma_2 = 0$ und $\max \sigma_1 = +\sigma_s$ sein; dies liefert aus Gl. (56) die erste Bestimmungsgleichung

$$3\sigma_s^2 - \frac{a}{b} \cdot \sigma_s = a\sqrt{3}. \quad (57a)$$

Für $\sigma_1 = +\sigma_s$ ist $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; dies liefert die zweite Bestimmungsgleichung

$$3\sigma_s^2 + \frac{a}{b} \sigma_s^2 + 2\sqrt{3} a \cdot \sigma_s = 2\sqrt{3} a \cdot e \sqrt{3}. \quad (57b)$$

Die dritte Bestimmungsgleichung ergibt sich aus der Bedingung: für $\sigma_3 = -\sigma_q$ ist $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ zu

$$3\sigma_q^2 + \frac{a}{b} \sigma_q^2 - 2\sqrt{3} a \cdot \sigma_q = 2\sqrt{3} a \cdot e \sqrt{3}. \quad (57c)$$

Aus Gl. (57a), (57b) und (57c) bekommt man die Konstanten

$$\frac{a}{b} = 3 \cdot \frac{3\sigma_s - \sigma_q}{\sigma_q + \sigma_s} = 3 \cdot \frac{3 - c}{c + 1}, \quad (58a)$$

$$2a\sqrt{3} = 12\sigma_s \cdot \frac{\sigma_q - \sigma_s}{\sigma_q + \sigma_s} = 12\sigma_s \cdot \frac{c - 1}{c + 1}, \quad (58b)$$

$$2a\sqrt{3} \cdot e \sqrt{3} = 12\sigma_s^2 \cdot \frac{\sigma_q}{\sigma_q + \sigma_s} = 12\sigma_s^2 \cdot \frac{c}{c + 1}. \quad (58c)$$

Aus Gl. (58a) und (58b) kann man den zweiten Parameter der Hauptschnittparabel ausrechnen:

$$b = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sigma_q - \sigma_s}{3\sigma_s - \sigma_q} = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c - 1}{3 - c}. \quad (59)$$

Aus Gl. (59) ist ersichtlich, daß für $c > 3$ $b < 0$ wird, womit man in Gl. (56a) $\bar{\sigma}_1 > 0$ und bei der Hauptschnittparabel mit Parameter a umgekehrt $\bar{\sigma}_1 < 0$ nehmen müßte. Damit ist die Gültigkeitsgrenze $c = 3$ bewiesen. Für $c = 3$ wird $b = \infty$, was aus Gl. (56), (58b) und (58c) die Grenzbedingung liefert:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 2\sigma_s(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 3\sigma_s^2, \quad (60)$$

oder aus Gl. (56a)

$$\bar{\sigma}_3^2 + a \cdot \bar{\sigma}_1 = a \cdot e. \quad (60a)$$

Gl. (60) bzw. (60a) sind die Gleichungen des geraden parabolischen Zylinders. Gl. (43) stimmt für $c = 3$ mit Gl. (60) überein. Allgemeine Übereinstimmung mit der Hypothese Gl. (43) von Leon²⁸ bekommt man, wenn man in Gl. (56) gleich $b = \infty$ annimmt, d. h. daß die Grenzfläche nicht eine Zerreißgrenzfläche wird; aus den Bedingungen: für $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ist $\sigma_1 = +\sigma_s$ und für $\sigma_2 = \sigma_1 = 0$ ist $\sigma_3 = -\sigma_q$ erhält man die Konstanten: $2a\sqrt{3} = 3(\sigma_q - \sigma_s)$ und $2a\sqrt{3} \cdot e \sqrt{3} = 3\sigma_q \sigma_s$, die mit jenen der Gl. (43) für $1 \leq c \leq 3$ übereinstimmen.

VII. Zusammenfassung.

Die Forschung nach der dem gegebenen Material entsprechenden Grenzflächen ist Aufgabe für alle jene Materialuntersuchungen, wo der Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung σ_2 berücksichtigt werden muß. Die Grenzbeanspruchung nach einer Belastungscharakteristik entspricht einer ebenen Raumkurve, die nach Projektion auf die Ebene (σ_3, σ_1) und Transformation im KS ($p_m, \max \tau$) mit der Hüllkurve nach dem Zuordnungsgesetz $\operatorname{tg}^2 \varphi = \sigma_1'$ zusammenhängt. Die durch das Rotationsparaboloid dargestellte Grenzfläche stellt den allgemeinen Fall einiger anderer Bruchtheorien dar. Die Notwendigkeit einer Grenzfläche höherer Ordnung ist aus der Forderung Kármáns und Mohrs entstanden, daß die Hüllkurve zwei mit der σ -Achse parallele Asymptoten haben soll. Entgegen der — sich auf eine einzige Hüllkurve gründenden — Theorie von Mohr wird eine Theorie mit vielen Hüllkurven entwickelt und die Vermutung ausgesprochen, daß besonders im Zugbereich auch die nichteinhüllbaren Spannungskreise zur Grenzbeanspruchung führen könnten. Die hier entwickelte Theorie der Grenzflächen und Grenzkurven macht die Entwicklung der Theorie der Hüllkurven und allgemein der Grenzkurven im KS (σ, τ) nicht entbehrlich, da man dadurch die Entwicklung einer Theorie der Abhängigkeit der Bruchform von der Bruchspannung fördert, wobei außerdem noch einige besondere Grenzbeanspruchungen leichter als im KS (σ_3, σ_1) zu erhalten sind.

(Eingegangen am 20. September 1946).

Zur Bieungsbeanspruchung der Drahtseile.

Von E. Czitary, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

A. Allgemeines und Aufgabenstellung.

Drahtseile sind Verbundkörper, zwischen deren Elementen — den Drähten — Reibung wirkt. Versuche ergaben, daß sich die Drahtseile im Betrieb bei der Biegung eher wie reibungsfreie Gebilde zufolge der Schmierung verhalten, als wie homogene Körper. Es tritt daher eine erhebliche Verschiebung der Drähte gegeneinander auf, während sie anderenfalls fast oder ganz unterbleiben müßte. Dementsprechend wird die Bieungsbeanspruchung in den Drähten nach der Beziehung

$$\sigma_b = E \frac{\delta}{2 r_s} \quad (\text{Reuleauxsche Formel}) \quad (1)$$

berechnet, in welcher δ die Drahtstärke, r_s der Krümmungshalbmesser der Seilmittellinie und E der Elastizitätsmodul des Werkstoffes ist.

Diese Gleichung gilt streng nur für die Elemente eines reibungsfreien Parallel-drahtbündels und v. Bach vertrat die Anschauung, daß die Bieungsbeanspruchung der Seildrähte wesentlich kleiner wäre. Später wurde die Zulässigkeit der Gl. (1) als brauchbare Näherung für einzelne ausgezeichnete Stellungen eines Drahtes im Querschnitt reibungsfreier Spiralseile nachgewiesen. Nachfolgend wird der Versuch eines allgemeingültigen Beweises für das Spiralseil unternommen und daraus Schlüsse auf die Bieungsbeanspruchung des verwickelter gebauten Litzenseiles gezogen.

B. Verformung der Drähte bei der Biegung eines reibungsfreien Spiralseiles.

Bei einem solchen Seil sind um einen Kerndraht mehrere Drahtlagen gewickelt, wobei die Drähte jeder Lage im geradegestreckten Zustand des Seiles einfache zylindrische Schraubenlinien bilden. Untersucht werden bloß kleine Biegungen, für welche

$$r_s \gg d$$

gilt, wenn d der Seildurchmesser ist. Nur diese Biegungen sind im allgemeinen auch für die Praxis von Bedeutung.

I. Versuche ergaben nun, daß bei der Biegung

1. innerhalb einer halben Schraubenwindung \widehat{ab} (Abb. 1) sich die Drähte in den aus den Nachbardrähten gebildeten Kanälen von der konkaven Innenseite des Seiles auf die konvexe Außenseite schieben, wobei die größte Verschiebung im Bereich der Mittelschicht, bei c , auftritt, während a und b keine Verschiebung erleiden;
2. nennenswerte Längskräfte in den Drähten nicht auftreten und
3. die Seilquerschnitte wenigstens annähernd eben bleiben.

II. Die Form der Drähte im gebogenen Seil ist jedoch nicht rein geometrisch bestimmt, wenn die Seilachse nach r_s gekrümmt wird; es müßten vielmehr zur Ermittlung der genauen Drahtkurven auch die bei der Biegung des Seiles entstehenden Kräftewirkungen Berücksichtigung finden. Eine solche Untersuchung wäre aber sehr verwickelt. Es wird nun gezeigt, daß die nachfolgend, in Analogie zur zylindrischen Schraubenlinie der Drähte im geraden Seil, auf kinematischem Weg entwickelte Form derselben im gebogenen Seil sehr weitgehend den tatsächlichen Verhältnissen genügt.

Kommen die Drahtkurven einer beliebigen Drahtlage im geraden Seil dadurch zustande, daß ein Punkt p eine Kreisbahn vom mittleren Durchmesser d_i dieser Drahtlage mit der konstanten Geschwindigkeit v beschreibt, während gleichzeitig die Kreisebene auf einer durch den Kreismittelpunkt gehenden und zu ihr senkrechten Geraden mit der ebenfalls konstanten Geschwindigkeit V fortschreitet, so lassen wir jetzt den Kreis vom Durchmesser d_i sich entlang des Krümmungskreises der Seilachse mit der gleichen Geschwindigkeit V als Mittelpunktsgeschwindigkeit weiterbewegen. Zur analytischen Festlegung der Drahtkurven wählen wir ein Koordinatensystem mit dem Ursprung O im Krümmungsmittelpunkt des Seiles, der x - und y -Achse in der Biegungsebene des Seiles und der z -Achse senkrecht darauf. Die x -Achse soll dabei durch einen am konvexen Rand der Drahtlage vom Durchmesser d_i gelegenen Punkt a einer Drahtkurve gehen (Abb. 1). Bei einem beliebigen Zwischenpunkt p ist dann auf dem Kreis vom Durchmesser d_i eine Weiterbewegung um den Winkel α gegenüber a erfolgt und auf dem Kreis vom Halbmesser r_s eine solche um den Winkel φ . Der Zusammenhang zwischen α und φ ergibt sich dabei aus

$$v t = \alpha \frac{d_i}{2}$$

und

$$V t = \varphi r_s$$

zu

$$\frac{\alpha}{\varphi} = \frac{v}{V} \frac{2 r_s}{d_i} = n, \quad (2)$$

wobei in Wirklichkeit stets $n \gg 1$. Aus Abb. 1 entnimmt man leicht die Beziehungen

$$r = r_s + \frac{d_i}{2} \cos \alpha \quad \text{und} \quad z = \frac{d_i}{2} \sin \alpha.$$

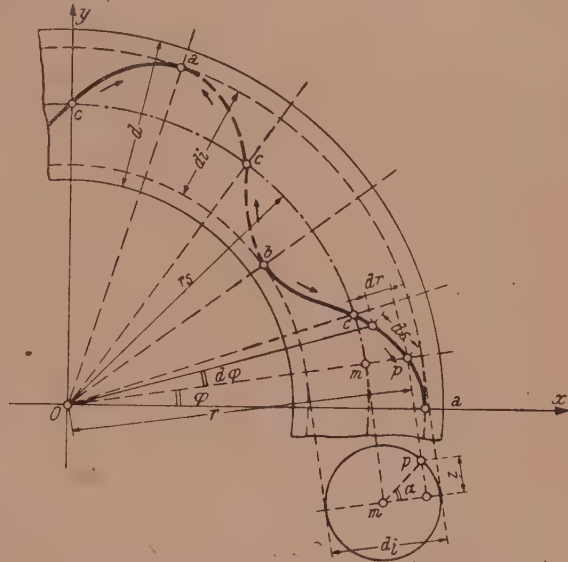


Abb. 1. Form der Drähte in einem gebogenen Spiralseil.

Ersetzt man darin gemäß Gl. (2) α durch φ , so entstehen

$$r = r_s + \frac{d_i}{2} \cos n \varphi \text{ und } z = \frac{d_i}{2} \sin n \varphi \quad (3)$$

als Bestimmungsgleichungen für die Drahtkurven.

III. Nunmehr wird der Nachweis geführt, daß die so definierte Drahtform nicht den unter I angegebenen Beobachtungen bei Versuchen widerspricht. Wir vergleichen zu diesem Zweck zunächst die Länge einer halben Schraubenwindung \widehat{ab} im gebogenen mit jener im geraden Seil.

1. Für ein Bogenelement gilt allgemein die Gleichung

$$ds = \sqrt{(r \cdot d\varphi)^2 + dr^2 + dz^2},$$

welche sich für Bogen, die nicht allzuweit von der Seilachse abweichen, in

$$ds \doteq r d\varphi \left[1 + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)^2 \right]$$

vereinfachen läßt. Setzt man darin für

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{n d_i}{2} \sin n \varphi \text{ und } \frac{dz}{d\varphi} = \frac{n d_i}{2} \cos n \varphi,$$

so ergibt sich für einen Bogen mit den Grenzen 0 und φ_1

$$s \doteq \int_0^{\varphi_1} \left(r_s + \frac{d_i}{2} \cos n \varphi \right) d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_1} \frac{\left(\frac{n d_i}{2} \right)^2 \sin^2 n \varphi}{r_s + \frac{d_i}{2} \cos n \varphi} d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_1} \frac{\left(\frac{n d_i}{2} \right)^2 \cos^2 n \varphi}{r_s + \frac{d_i}{2} \cos n \varphi} d\varphi$$

und nach Ausführung der Integrationen

$$s \doteq \left[r_s \varphi + \frac{d_i}{2n} \sin n \varphi + \frac{n d_i^2}{8} \frac{2}{\sqrt{r_s^2 - \frac{d_i^2}{4}}} \arctg \left(\sqrt{\frac{r_s - \frac{d_i}{2}}{r_s + \frac{d_i}{2}}} \cdot \operatorname{tg} \frac{n \varphi}{2} \right) \right]_0^{\varphi_1}.$$

Für den, auf dem konvexen Außenteil eines Spiralseiles befindlichen Teilbogen \widehat{ac} einer halben Schraubenwindung, der durch 0 und $\frac{\pi}{2n}$ begrenzt ist, liefert dies, wenn wegen $r_s \gg d_i$ im dritten Glied auf der rechten Seite außerdem unter den Wurzelzeichen d_i gestrichen wird,

$$s_{\widehat{ac}} \doteq \frac{r_s \pi}{2n} + \frac{d_i}{2n} + \frac{n d_i^2 \pi}{16 r_s}.$$

Analog erhalten wir für den Teilbogen \widehat{cb} auf der konkaven Innenseite mit den Grenzen $\frac{\pi}{2n}$ und $\frac{\pi}{n}$

$$s_{\widehat{cb}} \doteq \frac{r_s \pi}{2n} - \frac{d_i}{2n} + \frac{n d_i^2 \pi}{16 r_s}.$$

Die Länge einer halben Schraubenwindung \widehat{ab} beträgt mithin

$$s_{\widehat{ab}} \doteq \frac{r_s \pi}{n} + \frac{n d_i^2 \pi}{8 r_s}.$$

In diesem Ausdruck ist das erste Glied die Länge der Seilachse und das zweite die Verlängerung des Bogens gegenüber der Seilachse. Derselbe Wert ergibt sich auch für die halbe Windungslänge eines Drahtes in einem geraden Seilstück. Aus Abb. 2 folgt nämlich

$$s_{\widehat{ab}} = \sqrt{\left(\frac{r_s \pi}{n} \right)^2 + \left(\frac{d_i \pi}{2} \right)^2},$$

was für flache Windungen näherungsweise in

$$s_{\widehat{ab}} \doteq \frac{r_s \pi}{n} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{d_i \pi}{2} \right)^2}{\frac{r_s \pi}{n}} = \frac{r_s \pi}{n} + \frac{n d_i^2 \pi}{8 r_s}$$

übergeht. Bei der im gebogenen Seil angenommenen Drahtform kann also tatsächlich die auf der konvexen Außenseite des Seiles erforderliche Verlängerung der Drähte durch die sich auf der konkaven Innenseite ergebende Verkürzung gerade gedeckt werden.¹ Das Maß der Drahtverschiebung beträgt dabei im Bereiche der Mittelschicht, bei c

$$\frac{d_i}{2n}.$$

2. Weiters haben wir nachzuweisen, daß alle Drähte einer Lage des gebogenen Seiles den ihnen im Seilquerschnitt zur Verfügung stehenden Raum $d_i \pi$ genau so, wie im geradegestreckten Seil ohne Zwang ausfüllen. Entsprechend dem angenommenen Erzeugungsgesetz für die Drahtkurven im gebogenen Seil sind nach Abb. 3 die Geschwindigkeiten in einem beliebigen Punkt p :

$$\left. \begin{array}{l} \text{In der großen Kreisbahn (Bewegung um } 0) \quad V_\xi = V \frac{r_s + \xi}{r_s}; \\ \text{in der kleinen Kreisbahn (Bewegung um } m) \quad v. \end{array} \right\} U_\xi^2 = V_\xi^2 + v^2$$

Daraus folgt für den Winkel, welchen die Drahtkurve an dieser Stelle mit der Seilachse bildet und der als Flechtwinkel bezeichnet wird,

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{v}{V_\xi} = \frac{v}{V} \frac{r_s}{r_s + \xi}. \quad (4)$$

Für ein gerades Spiralseil ist gemäß Abb. 2 und mit Benutzung von Gl. (2)

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{\frac{d_i \pi}{2}}{\frac{r_s \pi}{n}} = \frac{v}{V}, \quad (4a)$$

was übrigens aus der Beziehung für den Flechtwinkel im gebogenen Seil auch unmittelbar gefolgert werden kann und womit diese übergeht in

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \omega_0 \frac{r_s}{r_s + \xi}. \quad (4b)$$

Der zusätzlich von einem Draht einer beliebigen Drahtlage des gebogenen Seiles beanspruchte Raum ist

$$\Delta = \frac{\delta}{\cos \omega} - \frac{\delta}{\cos \omega_0} = \delta (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega} - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega_0}),$$

wofür bei flachen Windungen näherungsweise auch

$$\Delta \doteq \frac{\delta}{2} (\operatorname{tg}^2 \omega - \operatorname{tg}^2 \omega_0)$$

geschrieben werden kann. Trägt man darin für $\operatorname{tg} \omega$ den gefundenen Wert ein, so entsteht

$$\Delta \doteq \frac{\delta}{2} \operatorname{tg}^2 \omega_0 \left[\frac{r_s^2}{(r_s + \xi)^2} - 1 \right] \doteq - \delta \operatorname{tg}^2 \omega_0 \frac{\xi}{r_s}.$$

¹ Andererseits ergibt sich, daß bei kleinem Biegungshalbmesser r_s ein solcher Längenausgleich nicht mehr möglich ist, was auch Beobachtungen bestätigen.

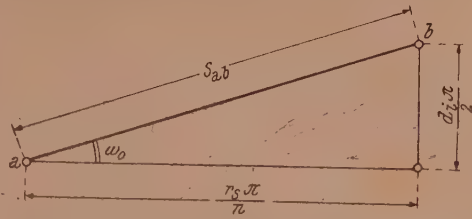


Abb. 2. Im geradegestreckten Seil auf eine halbe Windungslänge abgewickelter Draht.

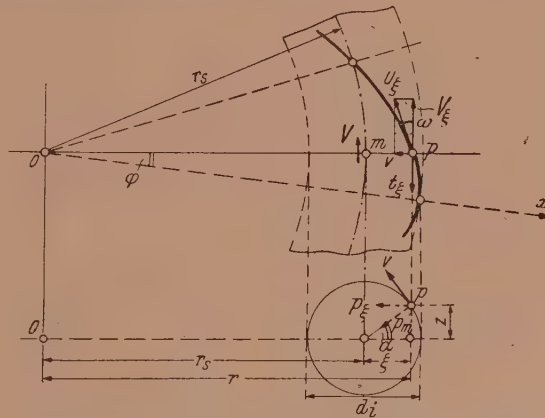


Abb. 3. Geschwindigkeiten und Beschleunigungen eines Punktes p bei Erzeugung der Drahtkurven.

Da ξ zwischen $\pm \frac{d_i}{2}$ schwankt und Δ annähernd linear in ξ ist, so wird der erforderliche Mehrraum der Drähte einer Lage auf der konkaven Innenseite des Seiles ($\xi = 0$ bis $-\frac{d_i}{2}$) durch den sich für die konvexe Außenseite ($\xi = 0$ bis $+\frac{d_i}{2}$) ergebenden Raumüberschuß gerade ausgeglichen. Ein Zwängen der Drähte im Seilquerschnitt tritt demnach nicht ein.

C. Krümmung der Drähte im gebogenen Seil.

I. Damit durch die angegebenen Bewegungen eines Punktes p die gewünschten Drahtkurven für das gebogene Seil zustande kommen, müssen an ihm folgende Beschleunigungen wirksam sein (Abb. 3):

1. Eine Normalbeschleunigung zufolge der Drehung um m

$$p_m = \frac{v^2}{\frac{d_i}{2}}$$

2. Eine Normalbeschleunigung zufolge der Drehung um O

$$p_\xi = \frac{V_\xi^2}{r_s + \xi}$$

3. Eine Coriolis-Beschleunigung tangential an die große Kreisbahn $t_\xi = -2v \sin \alpha \frac{V_\xi}{r_s + \xi}$.²

II. Zur Ermittlung der Krümmungsverhältnisse der Bahn des Punktes p denken wir uns die Bewegungsvorgänge auf zwei die Kurve begleitende und zueinander senkrechte Ebenen E_1 und E_2 projiziert, welche beide die Kurventangente T in p enthalten und von denen E_2 die Tangentialebene an den zur Kurve gehörigen Ringwulst in p ist.³ Gemäß dem allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Krümmungshalbmesser ρ einer ebenen Bahnkurve und der Normalbeschleunigung p_n , welche durch die Beziehung

$$\rho = \frac{v^2}{p_n}$$

ausgedrückt wird, sind dann zur Ermittlung der Krümmungshalbmesser in den Projektionen der

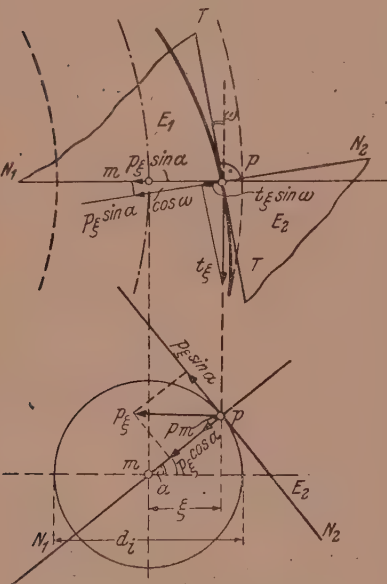


Abb. 4. Normalbeschleunigungen in bezug auf die Kurvenprojektionen. (In der oberen Figur hat t_ξ ein negatives Vorzeichen zu erhalten.)

Bahnkurve auf die Ebene $E_1 (TN_1)$ und $E_2 (TN_2)$ die betreffenden Normalbeschleunigungen zu bestimmen (Abb. 4).

² Nach einem Zeitelement dt hat sich Punkt p in der Richtung gegen O um $v \sin \alpha dt$ weiterbewegt. Seine Geschwindigkeit in der großen Kreisbahn ist dabei um den Betrag $\frac{V_\xi}{r_s + \xi} v \sin \alpha dt$ kleiner geworden, wozu in der großen Kreisbahn die negative tangentielle Beschleunigung $t_{\xi 1} = -\frac{V_\xi}{r_s + \xi} v \sin \alpha$ notwendig erscheint. Ferner hat während eines solchen Zeitelementes die kleine Kreisscheibe mit dem Punkt p sich um ihre durch m gehende lotrechte Achse gedreht, damit ihre Ebene senkrecht zur großen Kreisbahn bleibt und sich nicht bloß parallel verschiebt. Der Drehwinkel beträgt $\frac{V_\xi}{r_s + \xi} dt$ und um diesen Winkel muß auch die Geschwindigkeitskomponente $v \sin \alpha$ gedreht werden, was eine weitere tangentielle Beschleunigung in bezug auf die große Kreisbahn mit dem Wert $t_{\xi 2} = -v \sin \alpha \frac{V_\xi}{r_s + \xi}$ erfordert.

³ E_1 und E_2 gehören nicht dem natürlichen Dreikant an.

Für die Krümmung der in die Ebene E_1 fallenden Projektion sind die Beschleunigungskomponenten in Betracht zu ziehen, welche die Richtung der Normalen N_1 haben. Diese liefern

$$N_{\xi 1} = p_m + p_{\xi} \cos \alpha = p_m + p_{\xi} \frac{\xi}{\frac{d_i}{2}}.$$

Für die Krümmung der in der Ebene E_2 gelegenen Projektion sind jene Beschleunigungskomponenten maßgebend, die in die Richtung der Normalen N_2 fallen. Sie ergeben

$$\begin{aligned} N_{\xi 2} &= p_{\xi} \sin \alpha \cos \omega - t_{\xi} \sin \omega = \\ &= p_{\xi} \frac{\sqrt{\left(\frac{d_i}{2}\right)^2 - \xi^2}}{\frac{d_i}{2}} \cos \omega + 2v \frac{\sqrt{\left(\frac{d_i}{2}\right)^2 - \xi^2}}{\frac{d_i}{2}} \frac{V_{\xi}}{r_s + \xi} \sin \omega. \end{aligned}$$

Mithin beträgt der Krümmungshalbmesser der Kurvenprojektion in der Ebene E_1

$$\varrho_1 = \frac{U_{\xi}^2}{N_{\xi 1}} = \frac{U_{\xi}^2}{p_m + p_{\xi} \frac{\xi}{\frac{d_i}{2}}}$$

und nach Einsetzung der Werte für p_m , p_{ξ} und U_{ξ}

$$\varrho_1 = \frac{\frac{d_i}{2}}{\cos^2 \omega \left(\operatorname{tg}^2 \omega + \frac{\xi}{r_s + \xi} \right)} \quad (5)$$

Für $r_s = \infty$ ergibt dies

$$\varrho_{1,0} = \frac{\frac{d_i}{2}}{\sin^2 \omega_0}, \quad (5a)$$

was dem Krümmungshalbmesser der zylindrischen Schraubenlinie eines Drahtes im geradegestreckten Seil entspricht. Analog ist der Krümmungshalbmesser der Kurvenprojektion auf die Ebene E_2

$$\varrho_2 = \frac{U_{\xi}^2}{N_{\xi 2}} = \frac{U_{\xi}^2}{p_{\xi} \sin \alpha \cos \omega + t_{\xi} \sin \omega}$$

oder nach Einführung der Ausdrücke für p_{ξ} , t_{ξ} und U_{ξ}

$$\varrho_2 = \frac{\frac{d_i}{2}}{\cos \omega (1 + \sin^2 \omega) \sqrt{\left(\frac{d_i}{2}\right)^2 - \xi^2}} \quad (6)$$

Für $r_s = \infty$, also beim geradegestreckten Seil, ist $\varrho_{2,0} = \infty$. Aus den Krümmungshalbmessern ϱ_1 und ϱ_2 der beiden Kurvenprojektionen läßt sich nun leicht der Halbmesser ϱ des Schmiegungskreises der Drahtkurven im gebogenen Seil finden, wenn sich die Projektionsebenen in der Kurventangente schneiden, wie dies hier zutrifft; es gilt dann

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2}. \quad (7)$$

Im vorliegenden Fall ist aber die Kenntnis von ϱ weniger belangreich; gemäß Punkt A interessieren uns vielmehr die zusätzlichen Krümmungen, welche die Drähte beim Übergang eines geradegestreckten Seiles in den gebogenen Zustand erfahren. Die betreffenden Krümmungsänderungen der Drahtprojektionen betragen

$$\Delta k_1 = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_{1,0}} = \frac{2}{d_i} \left[\cos^2 \omega \left(\operatorname{tg}^2 \omega + \frac{\xi}{r_s + \xi} \right) - \sin^2 \omega_0 \right], \quad (8)$$

$$\Delta k_2 = \frac{1}{\varrho_2} - \frac{2}{d_i} \frac{\cos \omega (1 + \sin^2 \omega) \sqrt{\left(\frac{d_i}{2}\right)^2 - \xi^2}}{r_s + \xi}. \quad (9)$$

⁴ E. Müller: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. I, 2. Aufl., S. 140. Leipzig: Verlag Teubner, 1918.

Mit Rücksicht auf den Zusammenhang zwischen den diesen Krümmungsänderungen der Drahtprojektionen entsprechenden Momentenkomponenten und dem gesamten Biegemoment in einem Drahtquerschnitt bei der Biegung des Seiles, besteht für die gesamte Krümmungsänderung Δk und den rechtwinkelig aufeinanderstehenden Δk_1 und Δk_2 die Beziehung

$$\Delta k^2 = \Delta k_1^2 + \Delta k_2^2. \quad (10)$$

Setzt man darin für Δk_1 und Δk_2 die Werte ein und nimmt $\omega \doteq \omega_0$ an, was wegen $r_s \gg d$ sicher statthaft ist, dann ergibt sich der verhältnismäßig einfache Ausdruck

$$\Delta k = \frac{2 \cos \omega}{d_i (r_s + \xi)} \sqrt{\xi^2 \cos^2 \omega + \left(\frac{d_i^2}{4} - \xi^2 \right) (1 + \sin^2 \omega)^2}. \quad (11)$$

Für die Grenzfälle von ω liefert dieser:

$$\begin{aligned} \omega &\doteq 0 \text{ (Drahtbündel)} & \Delta k &= \frac{1}{r_s + \xi}, \\ \omega &= \frac{\pi}{2} \text{ (Drahtschraube)} & \Delta k &= 0. \end{aligned}$$

Für die Grenzfälle von ξ entsteht:

$$\xi = \pm \frac{d_i}{2} \quad \Delta k = \frac{\cos^2 \omega}{r_s \pm \frac{d_i}{2}}, \quad (12)$$

$$\xi = 0 \quad \Delta k = \frac{\cos \omega (1 + \sin^2 \omega)}{r_s}. \quad (13)$$

Die beiden letzteren Werte wurden schon früher (vgl. Punkt A) nachgewiesen, und zwar der erstere in einer Abhandlung von Baticle,⁵ der zweite hingegen in der Habilitationsschrift Woernles.⁶

III. Aus Gl. (11) erkennt man, daß für kleinere Flechtwinkel ω , wie sie in der Praxis fast ausnahmslos aufzutreten pflegen, die Krümmungsänderung eines Drahtes bei der Biegung eines reibungsfreien Spiralseiles nach dem Halbmesser r_s nahezu unabhängig von der Stellung ξ des Drahtes im Seilquerschnitt und ungefähr gleich $\frac{1}{r_s}$ ist. Hiermit erscheint die Brauchbarkeit der Reuleauxschen Formel [Gl. (1)] zur Berechnung der Biegungsbeanspruchung in reibungsfreien Spiralseilen unter der Voraussetzung nachgewiesen, daß auf die Formänderungen, welche die Drähte beim Verseilen erleiden, nicht eingegangen werden muß.⁷

D. Torsion der Drähte im gebogenen Seil.

Hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen der mathematischen Torsion der Drähte im gebogenen Seil und den Torsionsbeanspruchungen derselben gilt folgendes:

⁵ Baticle: Le calcul du travail du métal, dans les câbles métalliques. Annales des ponts et chaussées, janvier 1912.

⁶ Woernle: Zur Beurteilung der Drahtseilschwebbahnen für Personenverkehr. Z. Ver. dtsch. Diploming., Jg. 1913. Die dort abgeleitete Beziehung $\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos \gamma \sqrt{r_s^2 \omega_2^4 + 4 a^2 \omega_1^2 \omega_2^2}}{a^2 \omega_1^2 + r_s^2 \omega_2^2}$ stimmt mit der hier für Δk bei $\xi = 0$ abgeleiteten überein, wenn man darin $v = a \omega_1$, $V = r_s \omega_2$, $\frac{v}{V} = \tan \omega$, $\gamma = \beta - \omega$ und $\tan \beta = \frac{2v}{V}$ setzt. Woernle wandte hierbei erstmalig die kinematische Methode an.

Siehe diesbezüglich auch Persson: Analys av trädarnas krökning i ståltrådslinor. Tekn. Tidskr., Stockholm, Oktober 1926.

⁷ Bei den grundsätzlichen Überlegungen für die vorliegende Arbeit, welche schon weit zurückliegen (vgl. Hanker: Die Sicherheit der Drahtseile, Z. österr. Ing.- u. Architekten-Ver., Jg. 1925, H. 5/6, S. 40 Fußnote 3), wurde der Verfasser von seinem inzwischen verstorbenen Kollegen F. Vlk unterstützt, dessen er hiermit freundlich gedenkt.

1. Die Wickelung der Drähte bei der Seilherstellung erfolgt in der Regel torsionsfrei. Nennenswerte Torsionsbeanspruchungen treten daher in den Drähten eines geradegestreckten Seiles meist nicht auf.⁸

2. Dagegen kommt es bei der Seilbiegung auch zu Drahtverwindungen, die sich als Unterschied Δt zwischen der mathematischen Torsion t der Drähte im gebogenen und t_0 im geradegestreckten Seil darstellen. Diese Verwindungen Δt vermögen sich jedoch in ähnlicher Art wie die Längenänderungen der Drähte bei der Biegung des Seiles, wenigstens teilweise auszugleichen, was auch durch Beobachtungen bestätigt ist, bei denen ein leichtes Wälzen der Drähte gleichzeitig mit deren Verschiebung festgestellt wurde.

Von einem Nachweis der Torsionsbeanspruchungen kann daher im allgemeinen abgesehen werden.

E. Schlüsse auf die Bieigungsbeanspruchung der Litzenseile.

I. Im Gegensatz zu den Spiralseilen sind die Litzenseile doppelt geflochten. Zunächst werden die Litzen hergestellt, welche den gleichen Aufbau wie ein Spiralseil zeigen und diese dann um eine Hanfseele zum Litzenseil gewickelt. Bei Gleichschlag ist der Windungssinn der Drähte in den Litzen derselbe wie jener der Litzen im Seil; bei Kreuzschlag hingegen der umgekehrte.

II. Mit Hilfe der im Abschnitt C abgeleiteten Beziehungen können wir zunächst für ein nach dem Halbmesser r_s gebogenes, reibungsfreies Litzenseil die Krümmungen der Litzenachsen ohneweiters angeben. Mit diesen Krümmungen lassen sich dann unter nochmaliger Anwendung der angegebenen Formeln die Krümmungen der Drähte in den Litzen finden.

Bei verhältnismäßig kleinen Flechtwinkeln ω_1 der Drähte in den Litzen und ω_2 der Litzen im Seil ist zu erwarten, daß bei der Biegung eines reibungsfreien Litzenseiles nach dem Halbmesser r_s die Krümmungsänderungen der Drähte ebenfalls noch nicht allzu erheblich von $\frac{1}{r_s}$ abweichen.

Besonders einfach läßt sich dies für Drähte einer Lage d_i nachweisen, die in dem betrachteten Seilquerschnitt (Abb. 5) entweder vom Krümmungsmittelpunkt O des Seiles am weitesten entfernt, bei a_1 , oder ihm am nächsten, bei b_1 , liegen. Bezeichnet D_0 den Durchmesser des Kreises, auf dem die Litzenmittelpunkte im Seilquerschnitt liegen, so ergibt sich nach Gl. (5) und (6) für die Krümmungshalbmesser der Litzenachsenprojektionen in den zu a_1 und b_1 gehörigen Punkten a_2 und b_2

$$R_1 = \frac{D_0}{2} \frac{1}{\cos^2 \omega_2 \left(\operatorname{tg}^2 \omega_2 \pm \frac{\frac{D_0}{2}}{r_s \pm \frac{D_0}{2}} \right)}, \quad R_2 = \infty.$$

⁸ Wenn die Seillängskräfte außer Betracht bleiben, die nicht Gegenstand dieser Abhandlung bilden.

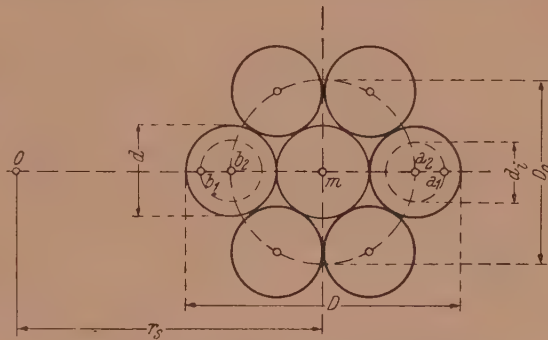


Abb. 5. Zur Biegung eines Litzenseiles.

Zufolge Gl. (7) entsteht daraus für den Halbmesser des Schmiegungskreises $R = R_1$. Analog gilt für die Krümmungshalbmesser der Drahtprojektionen in den Punkten a_1 und b_1

$$\varrho_1 = \frac{d_i}{2} \frac{1}{\cos^2 \omega_1 \left(\operatorname{tg}^2 \omega_1 \pm \frac{\frac{d_i}{2}}{R \pm \frac{d_i}{2}} \right)}, \quad \varrho_2 = \infty.$$

Für das geradegestreckte Seil, also bei $r_s = \infty$, lauten die betreffenden Beziehungen

$$R_{1,0} = \frac{D_0}{2} \frac{1}{\sin^2 \omega_{2,0}}, \quad R_{2,0} = \infty, \quad R_0 = R_{1,0};$$

$$\varrho_{1,0} = \frac{d_i}{2} \frac{1}{\cos^2 \omega_{1,0} \left(\operatorname{tg}^2 \omega_{1,0} \pm \frac{\frac{d_i}{2}}{R_0 \pm \frac{d_i}{2}} \right)}, \quad \varrho_{2,0} = \infty.$$

Die Krümmungsänderung der Drähte ergibt sich daraus mit

$$\Delta k = \Delta k_1 = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_{1,0}} = \frac{2}{d_i} \left[\cos^2 \omega_1 \left(\operatorname{tg}^2 \omega_1 \pm \frac{\frac{d_i}{2}}{R \pm \frac{d_i}{2}} \right) - \cos^2 \omega_{1,0} \left(\operatorname{tg}^2 \omega_{1,0} \pm \frac{\frac{d_i}{2}}{R_0 \pm \frac{d_i}{2}} \right) \right],$$

was sich mit $\omega_1 \doteq \omega_{1,0}$ und Vernachlässigung von $d_i/2$ gegen R in den Nennern vereinfacht zu

$$\Delta k \doteq \pm \cos^2 \omega_1 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right).$$

Für den Klammerausdruck entsteht durch Einführung der Werte für R und R_0

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{2}{D_0} \left[\cos^2 \omega_2 \left(\operatorname{tg}^2 \omega_2 \pm \frac{\frac{D_0}{2}}{r_s \pm \frac{D_0}{2}} \right) - \sin^2 \omega_{2,0} \right],$$

wofür mit $\omega_2 \doteq \omega_{2,0}$ und Unterdrückung von $\frac{D_0}{2}$ gegen r_s auch geschrieben werden kann

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \doteq \pm \frac{\cos^2 \omega_2}{r_s}.$$

Setzt man dies in den Ausdruck für Δk ein, so erhält man schließlich

$$\Delta k \doteq \frac{\cos^2 \omega_1 \cos^2 \omega_2}{r_s},$$

was für kleinere ω_1 und ω_2 sicherlich noch nicht zu sehr von $\frac{1}{r_s}$ abweicht. Das Ergebnis ist noch insofern bemerkenswert, als die Krümmungsänderung unabhängig davon erscheint, ob das Seil ein Gleichschlag- oder ein Kreuzschlagseil ist.

(Eingegangen am 23. September 1946.)

Die Nutzbreite der zweiseitig freigestützten, mit einer Einzellast belasteten Stahlbetonplatte.

Von F. Pongratz, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

Der Deutsche Ausschuß für Eisenbeton hat in seinen Heften 44 und 52 das Ergebnis umfangreicher Plattenversuche an mit einer Einzellast belasteten, nur auf zwei gegenüberliegenden Rändern frei aufliegenden Platten veröffentlicht. Diese Platten hatten durchwegs eine Stützweite von $a = 2.0$ m und eine Breite von $b = 3.0, 1.4, 0.8$ und 0.5 m. Die Aufstandflächen der in Plattenmitte aufgebrachten Einzellasten waren bei den kleineren Lasten Kreisinge von 10 cm äußerem und 5 cm innerem Durchmesser, bei den größeren Lasten waren es vier Quadrate mit 12 cm Seitenlänge in 6 cm Abstand. Der Bewehrungsanteil aller Platten ist ziemlich gleich und so bemessen, daß der Bruch durch die Überwindung der Zugzone erfolgte. Die Querbewehrung wechselt von 1.0 bis $\frac{1}{7}$ der Längsbewehrung. Die Abmessungen der Versuchsplatten, die Anrißlasten, das sind die Lasten, unter welchen die ersten Risse auftraten, und die Bruchlasten sind in den beiden Tabellen übersichtlich zusammen gestellt. Die Biegemomente, für welche die Spannungen ermittelt wurden, sind nach der Plattentheorie berechnet.

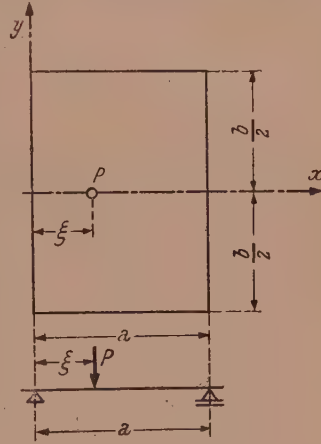


Abb. 1.

Für die Tragwerksanordnung nach Abb. 1 und der Laststellung $P(\xi, 0)$ ist die Gleichung der Biegefläche durch eine einfach unendliche Reihe dargestellt, in welcher die Abkürzungen:

ν = reziproker Wert der Poissonschen Zahl,

$$N = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)},$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}; \quad \beta_m = \frac{m\pi}{2} \cdot \frac{b}{a},$$

$$R_{1m} = \frac{-4 - (1 - \nu)^2 \beta_m^2 (1 - \text{tg}^2 \beta_m) + (1 + \nu)^2 \text{tg}^2 \beta_m}{(1 - \nu)^2 \beta_m (1 - \text{tg}^2 \beta_m) - (1 - \nu)(3 + \nu) \text{tg} \beta_m},$$

$$R_{2m} = \frac{2 + (1 + \nu) \text{tg}^2 \beta_m}{(1 - \nu) \beta_m (1 - \text{tg}^2 \beta_m) - (3 + \nu) \text{tg} \beta_m}$$

eingeführt sind.

$$w = \frac{P \cdot a^2}{2\pi^3 N} \sum \frac{1}{m^3} \sin \alpha_m x \sin \alpha_m \xi \left[\pm \sin \alpha_m y + R_{1m} \cos \alpha_m y + \right. \quad (1) \\ \left. + R_{2m} \alpha_m y \sin \alpha_m y \pm \alpha_m y \cos \alpha_m y \right].$$

Die Differentialgleichung der elastischen Fläche $\Delta^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$ ist erfüllt und es läßt sich leicht nachweisen, daß auch die Randbedingungen befriedigt werden; für die freigestützten Ränder $x = 0$ und $x = a$ wird $m_x = m_y = 0$ und $m_{xy} = q_x \neq 0$ und für die vollkommen freien Ränder $y = \pm \frac{1}{2} b$ ist $m_x \neq 0$ und $m_y = q_y = 0$.

Aus den Ausdrücken für die Biegemomente

$$\left. \begin{aligned} m_x &= -\frac{P}{2\pi} \sum \frac{1}{m} \sin \alpha_m \xi \sin \alpha_m x [(1 + \nu) \sin \alpha_m y + \{(1 - \nu) R_{1m} + \\ &\quad + 2\nu R_{2m}\} \cos \alpha_m y - (1 - \nu) R_{2m} \alpha_m y \sin \alpha_m y - (1 - \nu) \alpha_m y \cos \alpha_m y], \\ m_y &= -\frac{P}{2\pi} \sum \frac{1}{m} \sin \alpha_m \xi \sin \alpha_m x [(1 + \nu) \sin \alpha_m y + \{(1 - \nu) R_{1m} + \\ &\quad + 2 R_{2m}\} \cos \alpha_m y + (1 - \nu) R_{2m} \alpha_m y \sin \alpha_m y + (1 - \nu) \alpha_m y \cos \alpha_m y] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

erhält man für den Lastort der Versuchsplatten ($\xi = x = \frac{a}{2}$, $y = 0$) die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} m_{x0} &= + \frac{P(1+\nu)}{2\pi} \sum_{m=1,3,5} \frac{1}{m} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \cdot S_{0m}, \\ m_{y0} &= + \frac{P(1+\nu)}{2\pi} \sum_{m=1,3,5} \frac{1}{m} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \cdot T_{0m}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

in welchen für $\frac{1-\nu}{1+\nu} R_{1m} - \frac{2\nu}{(1+\nu)} R_{2m} = S_{0m}$

und für $-\frac{1-\nu}{1+\nu} R_{1m} - \frac{2}{1+\nu} R_{2m} = T_{0m}$

gesetzt wurde. Da S_{0m} und T_{0m} sehr rasch gegen 1 konvergieren, ergibt sich für den Ort der Punktlast $m_x = m_y = \infty$.

Um den Übergang von der Punktbelastung mit den unendlich großen Werten am Lastort zur auf einer kleinen Kreisfläche vom Halbmesser c gleichförmig verteilten Belastung zu bewerkstelligen, werden die Gl. (3) umgeformt.

$$\left. \begin{aligned} m_{x0} &= \frac{P(1+\nu)}{2\pi} \sum \frac{1}{m} \sin^2 \frac{m\pi}{2} + \frac{P(1+\nu)}{2\pi} \sum \frac{1}{m} \sin^2 \frac{m\pi}{2} (S_{0m} - 1) = m_{x0}' + m_{x0}'', \\ m_{y0} &= \frac{P(1+\nu)}{2\pi} \sum \frac{1}{m} \sin^2 \frac{m\pi}{2} + \frac{P(1+\nu)}{2\pi} \sum \frac{1}{m} \sin^2 \frac{m\pi}{2} (T_{0m} - 1) = m_{y0}' + m_{y0}''. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Ausdrücke m_{x0}'' und m_{y0}'' lassen sich wegen der raschen Konvergenz von S_{0m} und T_{0m} leicht berechnen und erreichen für das Seitenverhältnis der Versuchsplatten $b:a = 1.5$ und $\nu = \frac{1}{6}$ die Werte $m_{x0}'' = +0.0162 P$ und $m_{y0}'' = -0.0058 P$.

In dem Ausdruck $m_{x0}' = m_{y0}' = \frac{P(1+\nu)}{2\pi} \sum \frac{1}{m} \sin^2 \frac{m\pi}{2}$ läßt sich unschwer das Biegemoment am Lastort des unendlich breiten Plattenstreifens mit einer Punktlast in ($\xi = \frac{a}{2}$, $y = 0$) erkennen. Nach Nadai kann dieser Ausdruck auch explizit angeschrieben werden

$$m_{x0}' = m_{y0}' = \frac{1+\nu}{4\pi} \cdot P \cdot l_n \frac{2a}{r\pi}. \quad (5)$$

Darin bedeutet a die Plattenstützweite und r den Radiusvektor eines Plattenpunktes in Polarkoordinaten mit dem Ursprung im Lastangriffsort ($\frac{a}{2}, 0$). Die Gültigkeit dieser Formel ist auf die engere Umgebung des Lastortes beschränkt und erreicht für $r = 0$ den Wert $m_{x0}' = m_{y0}' = \infty$.

Eine am Rand frei gestützte Kreisplatte mit dem Halbmesser a_1 und der Punktlast in Plattenmitte hat die Biegemomente

$$\left. \begin{aligned} m_r &= \frac{1+\nu}{4\pi} P l_n \frac{a_1}{r}, \\ m_t &= \frac{1+\nu}{4\pi} P l_n \frac{a_1}{r} + \frac{1-\nu}{4\pi} P. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Für die gleiche Kreisplatte mit einer auf einer Kreisfläche vom Halbmesser c gleichmäßig übertragenen Last $P = \pi c^2 p_0$ gelten für die Punkte innerhalb des Belastungskreises die Biegemomente

$$\left. \begin{aligned} m_r &= \frac{1+\nu}{4\pi} P l_n \frac{a_1}{c} + \frac{P}{4\pi} \left(1 - \frac{(1-\nu)c^2}{4a_1^2} - \frac{(3+\nu)r^2}{4c^2} \right), \\ m_t &= \frac{1+\nu}{4\pi} P l_n \frac{a_1}{c} + \frac{P}{4\pi} \left(1 - \frac{(1-\nu)c^2}{4a_1^2} - \frac{(3\nu+1)r^2}{4c^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ein Vergleich der Gl. (5), (6) und (7) führt nach Nadai zu den Ausdrücken (8) für die Biegemomente des Plattenstreifens mit der Stützweite a und der Gleichlast

$p_0 = \frac{P}{c^2 \pi}$ auf einer kleinen Kreisfläche vom Halbmesser c ; dabei sind die quadratischen Glieder $c : a_1$ vernachlässigt.

$$\left. \begin{aligned} m_{x'} &= \frac{1+\nu}{4\pi} P l_n \frac{2a}{\pi c} + \frac{P}{4\pi} \left(1 - \frac{(3+\nu)r^2}{4c^2} \right), \\ m_{y'} &= \frac{1+\nu}{4\pi} P l_n \frac{2a}{\pi c} + \frac{P}{4\pi} \left(1 - \frac{(3\nu+1)r^2}{4c^2} \right) - \frac{1-\nu}{4\pi} P. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

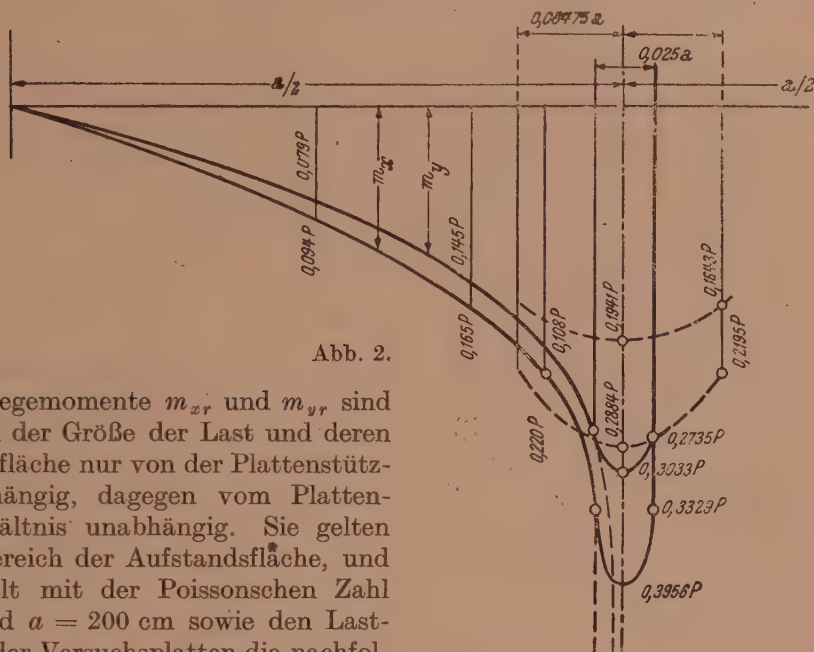


Abb. 2.

Die Biegemomente $m_{x'}$ und $m_{y'}$ sind außer von der Größe der Last und deren Aufstandsfläche nur von der Plattenstützweite abhängig, dagegen vom Plattenseitenverhältnis unabhängig. Sie gelten nur im Bereich der Aufstandsfläche, und man erhält mit der Poissonschen Zahl $\nu = 6$ und $a = 200$ cm sowie den Laststempeln der Versuchsplatten die nachfolgenden Werte für $r = 0$:

Kreisringfläche: $c = 5.0$ cm $m_{x_0'} = \frac{1+\nu}{4\pi} P l_n \frac{2a}{\pi c} + \frac{P}{4\pi} = 0.3794 P,$

4 Quadrate 12/12 cm: $c = 16.95$ cm $m_{x_0'} = \quad \quad \quad = 0.2662 P,$

20/20 cm Quadrat: $c = 11.28$ cm $m_{x_0'} = \quad \quad \quad = 0.3037 P.$

Damit ergeben sich die Biegemomente im Mittelpunkt der Lastaufstandsflächen für die Kleinstlasten mit

$$m_{x_0} = m_{x_0'} + m_{x_0''} = 0.3794 \cdot P + 0.0162 \cdot P = 0.3956 \cdot P,$$

$$m_{y_0} = m_{y_0'} + m_{y_0''} = 0.3794 \cdot P - 0.0663 \cdot P - 0.0058 \cdot P = 0.3033 P,$$

für die Größtlasten mit $m_{x_0} = 0.2824 \cdot P$ und $m_{y_0} = 0.1941 \cdot P$ und

ebenso für die 20/20 cm Stempel $m_{x_0} = 0.432 \cdot P$ für $b : a = 0.7$,

$$m_{x_0} = 0.652 \cdot P \text{ für } b : a = 0.4.$$

Durch die Gl. (8) sind die Größtbiegemomente und der Momentenverlauf innerhalb der Lastaufstandsfläche gegeben; der Momentenverlauf außerhalb dieser Lastaufstandsfläche wird durch die Gl. (2) beschrieben. Die Abb. 2 stellt den Verlauf der Biegemomente m_x und m_y im Schnitt $y = 0$ dar.

Für eine mit einer gleichförmig verteilten Last belasteten, mit der Stützweite a freigelagerten Platte, die das Seitenverhältnis $b : a$ hat, gilt die Gleichung der Biegefläche:

$$w = \frac{4}{\pi^5} \frac{p_0 a^4}{N} \sum \frac{1}{m^5} \sin \alpha_m x [1 + d \operatorname{Erf} \alpha_m y + e \alpha_m y \operatorname{Sin} \alpha_m y],$$

wobei $\alpha_m = \frac{m \pi}{a}$ ist. Man kann sich leicht überzeugen, daß sowohl die Differentialgleichung der elastischen Fläche als auch die Randbedingungen erfüllt sind. Die Beiwerte d und e werden aus den Randbedingungen als Funktionen von b und a gewonnen. Die Biegemomente m_{x_0} nähern sich sehr rasch den Werten für den Plattenstreifen und weichen nur für sehr schmale Platten von diesen Werten ab. Es wird für

$$\begin{aligned} b:a &= \infty & m_{x_0} &= 0.125 p \cdot a^2 \\ &= 1.5 & &= 0.127 \\ &= 0.7 & &= 0.129 \\ &= 0.4 & &= 0.136 \end{aligned}$$

Für das Seitenverhältnis $b:a = \infty$ wird $m_{y, y=0} = \nu \cdot m_{x, y=0}$.

Für die Versuchsplatten sind in den beiden nachfolgenden Tabellen die Biegemomente unter den Anrißlasten und unter den Bruchlasten ermittelt. Es sind im ersteren Falle die Biegezugspannungen, im letzteren Falle die Stahlspannungen ermittelt, und zwar einmal nach den Biegemomenten, wie sie die Plattentheorie ergibt, und zum Vergleich auch nach den Balkenbiegemomenten.

Tab. 1. Die Versuchsplatten mit $a = 2.0$ m Spannweite unter der Rißlast.

Platten-		$\frac{b}{a}$	Abmessungen				Unter der Rißlast P				
Nr.	Breite b m		\bar{d} cm	Bewehrungsanteil		$\frac{\mu_q}{\mu_l}$	Auf- stand	P t	P im Mittel t	m_x kgcm	σ_{bz} kg/cm ²
				Längs $\mu_l = \frac{F_{el}}{bd}$	Quer $\mu_q = \frac{F_{eq}}{bd}$						
1068	3·00	1·5	18	0·690	0·229	$\frac{1}{3}$	10	9·00	7·50	3190	45·5
1070					0·229	$\frac{1}{3}$	10	7·50			
1072					0·460	$\frac{2}{3}$	10	6·00			
1052	3·00	1·5	14	0·685	0·101	$\frac{1}{7}$	10	4·50	4·08	1786	43·1
1054					0·225	$\frac{1}{3}$	10	3·50			
1056					0·225	$\frac{2}{3}$	10	4·25			
1058					0·450		10	4·25			
1060					0·450		10	4·00			
1062					0·685	1	10	4·00			
1048	3·00	1·5	10	0·635	0·214	$\frac{1}{3}$	10	2·15	2·03	926	46·1
1050					0·685	1	10	1·90			
975						0·685	1	10			
977	3·00	1·5	14	0·685	0·685	1	10	3·50	4·50	1950	47·0
979					0·101	$\frac{1}{7}$	10	5·00			
981					0·101	$\frac{1}{7}$	10	5·00			
855	1·40	0·7	12	0·665	0·665	1	$\frac{20}{20}$	2·00	1·90	970	34·2
856							$\frac{20}{20}$	1·80			
854	0·80	0·4	12	0·665	0·665	1	$\frac{20}{20}$	1·10	1·10	875	30·8
852							$\frac{20}{20}$	1·10			

Die aus den ersten 11 Versuchsplatten ermittelte Biegezugspannung wird im Durchschnitt $\sigma_{bz} = \frac{1}{11} \cdot (3 \cdot 45.5 + 6 \cdot 43.1 + 2 \cdot 46.1) = 44.3$ kg/cm². Aus gleichzeitig durchgeführten Probekörperversuchen betrug die Biegezugfestigkeit des Betons $\sigma_{bz} = \frac{1}{5} \cdot (32.7 + 54.1 + 41.0 + 46.6 + 45.4) = 44.0$ kg/cm² und die reine Zugfestigkeit wurde mit $\sigma_z = 18.2$ kg/cm² festgestellt.

Aus den genauen Beobachtungen der mit wachsender Last fortschreitenden Rißbildungen und aus den Ergebnissen der Berechnungen in den Tab. 1 und 2 läßt sich zusammenfassend folgendes feststellen:

1. Für zweiseitig gestützte Platten aus Stahlbeton mit einer auf einer kleinen Fläche gleichmäßig aufgeteilten Belastung lassen sich sowohl die Rißlast, das ist

Tab. 2. Die Versuchsplatten unter der Bruchlast.

Nr.	$\frac{b}{a}$	$\frac{\mu_q}{\mu_l}$	Bruchlast P_t	Streck- spannung σ_s kg/cm ²	Probebalken		Volle Plattenbreite einger.			Größtmoment nach Plattentheorie		
					σ_{es}	$\frac{\sigma_{es}}{\sigma_s}$	m_x	σ_{es}	$\frac{\sigma_{es}}{\sigma_s}$	m_x	σ_{es}	$\frac{\sigma_{es}}{\sigma_s}$
975 979	1.5	1	23.25	3124	3520	1.13	3698	3610	1.15	6740	6410	2.05
1062	1.5	1	26.00	3397	3931	1.16	4110	3910	1.15	7510	7150	2.11
1058 1060	1.5	$\frac{2}{3}$	25.00	3407	4099	1.20	3960	3770	1.10	7230	6880	2.02
1072	1.5	$\frac{2}{3}$	40.00	3214	3674	1.14	6280	3510	1.13	11520	6450	2.01
1054 1056	1.5	$\frac{1}{3}$	22.00	3390	4064	1.20	3508	3342	0.99	6390	6080	1.79
1050 1048	1.5	$\frac{1}{3}$	9.75	2761	3359	1.21	1598	3360	1.22	2890	6080	2.20
1068 1070	1.5	$\frac{1}{3}$	36.00	3090	3746	1.21	5680	3175	1.03	10400	5810	1.88
981 1052	1.5	$\frac{1}{7}$	16.85	3145	3615	1.15	2650	2520	0.80	4790	4560	1.45
	1.5	$\frac{1}{7}$	17.50	3358	3958	1.18	2825	2690	0.80	5120	4880	1.45

jene Last, unter welcher die ersten Risse auftreten, als auch die Strecklast, das ist jene Last, die die Haupttragstäbe an der gefährdetsten Stelle bis zur Streckspannung beansprucht, recht gut mit Hilfe der für die homogene und dem Hookeschen Gesetz folgende Platte aufgestellten Formeln berechnen. Die Größe der Poissonschen Zahl ist auf das Ergebnis von geringem Einfluß und es kann daher mit dem in der Theorie des Stahlbetons eingeführten Wert $m = 6$ gerechnet werden.

2. Die Stärke der winkelrecht zur Hauptbewehrung liegenden Querbewehrung hat auf den Spannungszustand bis zur Reißlast keinen merkbaren Einfluß. Ebenso unbeeinflusst zeigt sich die Größe der Strecklast von der Querbewehrung, obwohl zugegeben werden muß, daß das Gesamtspannungsbild für verschieden querbewehrte Platten nicht das gleiche ist. Während bei stark querbewehrten Platten ($\frac{\mu_q}{\mu_l} > \frac{2}{3}$) der Spannungszustand in der Nähe der Strecklast recht gut dem der homogenen Platte angepaßt ist, tritt bei schwach querbewehrten Platten bereits früher eine Überbeanspruchung der Querbewehrung ein, die aber zunächst auf einen kleinen Raum in der Umgebung der Einzellast beschränkt bleibt und sich erst dann durch größere Formänderungen bemerkbar macht, bis auch die Hauptbewehrung die Streckspannung erreicht.

3. Durch das Erreichen der Streckspannung an der am meisten beanspruchten Stelle ist der Bruch der Platte wohl eingeleitet, aber noch lange nicht voll erreicht. Die zum Bruch erforderliche starke Dehnung der Tragstäbe an dieser Stelle wird erst möglich, wenn eine Reihe der Nachbareisen durch Überschreiten der Streckspannung nachgiebig genug geworden ist. Knapp vor dem Bruch erscheinen die Eisen einer bestimmten, von der Güte der Querverbindung abhängigen Breite nahezu gleich (eben mit der Streckspannung) beansprucht, während die bereits erfolgten Dehnungen gegen den Lastmittelpunkt hin zunehmen. Dort erreichen sie zuerst jenes Maß, das zum Zerdrücken der Betondruckzone ausreicht und so zum Bruch der Platte führt. Während also beim Balken der Streckbereich der Eisen, gemessen an der noch möglichen Laststeigerung, rasch durchschritten wird, erfolgt dies bei den Platten in viel langsamerem Maße; dies drückt sich auch im Verhältnis der Strecklast zur Bruchlast aus; für die Verhältnisse

$\frac{\text{Querbewehrung}}{\text{Längsbewehrung}} = 0 \left(\frac{1}{7} \right), \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}$ werden die Verhältnisse

$$\frac{\text{Bruchlast}}{\text{Strecklast}} = 2 \quad 2.6 \quad 2.8 \quad 2.9,$$

während für den Balken bekanntlich die Beziehung $\frac{\sigma_{ss}}{\sigma_s} = \text{rund } 1.1$ konstant bleibt.

Wenn man nun unter der Nutzbreite der zweiseitig freigestützten, mit einer Punktlast belasteten Platte jene Breite versteht, auf die die Punktlast als Streckenlast gleichmäßig aufgeteilt werden muß, um zu den gleichen Beanspruchungen zu kommen, wie sie durch die Punktlast erreicht werden, so wird mit den Bezeichnungen der Abb. 3 und mit dem von Nadai aufgestellten Ausdruck für das Biegemoment

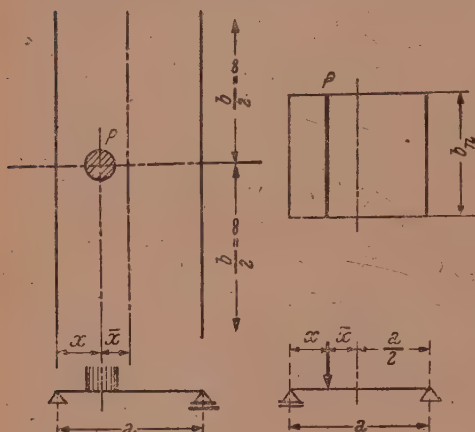


Abb. 3.

$$m_x = \frac{x \cdot (a - x) \cdot P}{a \cdot b_n} = \frac{1}{4\pi} \left(1 + (1 + \nu) l_n \frac{2 \sin \frac{\pi x}{a}}{\pi \frac{c}{a}} \right) \cdot P$$

und hieraus mit $\xi = \frac{x}{a}$ und $\gamma = \frac{c}{a}$

$$\beta_n = \frac{b_n}{a} = \frac{4\pi\xi(1-\xi)}{1 + (1 + \nu) l_n \frac{2 \sin \pi\xi}{\pi\gamma}} \quad (9)$$

Diese Gl. (9) läßt sich angenähert durch die der Rechnung leichter zugänglichen Beziehung

$$\beta_n = 0.435 - 1.5 \cdot \xi^2 + \frac{11.5 - 30.4 \xi^2}{\frac{a}{c} + 10.5 - 32.4 \cdot \xi^2} \quad (10)$$

ersetzen. Darin bedeuten $\bar{x} = \frac{a}{2} - x$ und $\bar{\xi} = 0.5 - \xi$. Die Gl. (9) und (10) beziehen sich auf den unendlich breiten Plattenstreifen, der mit einer einzigen Punktlast belastet ist. Die Biegemomente der Platte mit der endlichen Breite b lassen sich in der Form ausdrücken $m_{x0} = m_{x0'} + m_{x0''}$, worin $m_{x0'}$ das Biegemoment im gleichartig belasteten Plattenstreifen und $m_{x0''}$ einen nur von den Seitenabmessungen der Platte abhängigen Zusatzwert bedeutet. Der Beitrag von $m_{x0''}$ ist nur bei sehr schmalen Platten von Einfluß, wie aus der folgenden Zusammenstellung zu erkennen ist; hierbei ist für $100 \cdot \frac{m_{x0} - m_{x0'}}{m_{x0'}} = k$ gesetzt. Es ergibt sich

für	$b : a = 2.0$	1.50	1.0 und 0.4
bei $c : a = 0.025$	$k = 1.2$	4.3	15.2
und $c : a = 0.25$	$k = 2.8$	9.8	34.6
			210.0%

Die Gl. (9) und (10) behalten daher ihre Gültigkeit auch für endlich breite Platten, wenn die Punktlast wenigstens um 1.0 (bzw. 0.75) a vom freien Plattenrand absteht und wenn dabei ein Fehler in Kauf genommen wird, der bei den kleinsten Lastaufstandsflächen ($2c = 0.05a$) 1.2 (bzw. 4.3) % beträgt und bei den größten Aufstandsflächen ($2c = 0.5a$) 2.8 % (bzw. 9.8 %).



Abb. 4.

Die Wirkung eines Lastzuges, in welchem die gleich großen Lasten P in den gleichen Abständen r einander folgen, läßt sich nach Nadai unter Zugrundelegung der Bezeichnungen nach Abb. 4 aus der Gleichung der Biegefläche

$$w = \frac{P a^2}{2 \pi^3 N} \sum \frac{1}{m^3} \sin \frac{m \pi \bar{x}}{a} \sin \frac{m \pi x}{a} \cdot \left[\frac{1 + \frac{m \pi r}{2 a} \operatorname{Cotg} \frac{m \pi r}{2 a}}{\sin \frac{m \pi r}{2 a}} \operatorname{Cotg} \frac{m \pi y}{a} - \frac{1}{\sin \frac{m \pi r}{2 a}} \cdot \frac{m \pi y}{a} \sin \frac{m \pi y}{a} \right] \quad (11)$$

ermitteln. Es wird für den Lastort $(x = \bar{x}, y = \frac{r}{2})$

$$m_{x0} = \frac{1 + \nu}{2 \pi} P \sum \frac{1}{m} \sin^2 \frac{m \pi \bar{x}}{a} \cdot U_{0m} \quad (12)$$

und umgeformt:

$$m_{x0} = m_{x0}' + m_{x0}'' = \frac{1 + \nu}{2 \pi} P \sum \frac{1}{m} \sin^2 \frac{m \pi \bar{x}}{a} + \frac{1 + \nu}{2 \pi} P \sum \frac{1}{m} \sin^2 \frac{m \pi \bar{x}}{a} (-1 + U_{0m}), \quad (12a)$$

worin m_{x0}' das Biegemoment des mit einer einzigen Einzellast belasteten Plattenstreifens und m_{x0}'' einen vom Lastabstand abhängigen Zusatzwert darstellt. Dieser Zusatzwert ist, da der Klammerausdruck

$$(U_{0m} - 1) = \frac{1}{1 + \nu} \operatorname{Cotg} \frac{m \pi r}{a} - \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{m \pi r}{2 a} \left(1 - \operatorname{Cotg}^2 \frac{m \pi r}{2 a} \right) - 1$$

rasch gegen Null konvergiert, leicht zu berechnen und es ergibt sich für $m = 6$ bei

$$\begin{array}{cccc} r = 2a & 1.5a & 1.0a & \text{und } 0.5a \\ m_{x0}'' = 0.0007, & 0.0034, & 0.0167, & 0.1007 \cdot P. \end{array}$$

Die Fehler gegenüber dem Plattenstreifen mit nur einer einzigen Punktlast werden in Hundertteilen für

	$r = 2a$	$1.5a$	$1.0a$	$0.5a$	
$100 \cdot \frac{m_{x0} - m_{x0}'}{m_{x0}}$	$= 0.2$	0.9	4.4	26.5	für $c : a = 0.025$ und
	0.4	2.1	10.0	60.9	für $c : a = 0.25$.

Ein Lastenzug, dessen Lastabstände größer als die 1.5fache Plattenstützweite sind, beansprucht die Platte nicht mehr als eine einzige Last, wenn ein Fehler 0.9 bis 2.1% in Kauf genommen wird. Die Gl. (9) und (10) sind daher für alle Lastenzüge verwendbar, für welche $r \geq 1.5a$ ist.

Zieht man in Betracht, daß der Sicherheitsgrad der punkbelasteten, zweiseitig freigestützten Platten dadurch erhöht ist, daß der Bruch selbst bei nicht querbewehrten Platten erst dann eintritt, wenn die rechnungsmäßigen Stahlspannungen den doppelten Wert der Stahlstreckspannung erreichen, so kann man die Fehler, die bei Vernachlässigung des Einflusses der begrenzten Plattenbreiten bis $b = a$ und die Fehler durch die Vernachlässigung des Einflusses der Nachbarlasten bei Lastenfolgen bis $r = a$ gemacht werden, diesem erhöhten Sicherheitsgrad gegenüber vernachlässigen.

Da überdies die anrechenbare Nutzbreite kleiner sein muß als die Gesamtplattenbreite bei endlich begrenzten Platten und auch kleiner sein muß als der Lastabstand eines aus gleichen Lasten bestehenden Lastenzuges, haben die Gleichungen

$$b \leq \begin{cases} \beta_n \cdot a \\ r \end{cases} \quad (I)$$

allgemeine Gültigkeit, wenn Platten mit $b = a$ ausgeschlossen werden. Darin bedeutet

$$\beta_{n,\xi} = 0.435 - 1.5 \xi^2 + \frac{11.5 - 30.4 \xi^2}{\frac{a}{c} + 10.5 - 32.5 \xi^2} \quad (II)$$

für eine beliebige Laststellung und für die Laststellung in der Mitte der Plattenstützweite ($\xi = 0$)

$$\beta_{n,\xi=0} = 0.435 + \frac{11.5}{\frac{a}{c} + 10.5} \quad (IIa)$$

(Eingegangen am 23. September 1946.)

Elektronen-Feldtheorie.

Von L. Flamm, Wien.

Inhalt.

Einleitung. Die neuere Entwicklung der Physik legt es nahe, die Faradayschen Ideen voll zum Durchbruch zu bringen. — § 1. Die Elektronen werden als elektrische Feldmaterie gedeutet. Jedes einzelne erfüllt als solche den ganzen Raum, in ihrer Gesamtheit durchdringen sie einander. Die Feldlinienstruktur der elektrischen Feldmaterie hat besondere linienmechanische Abweichungen gegen die Newtonsche Punktmechanik zufolge. Die elektrische Feldmaterie verformt sich durch Bewegung der elektrischen Feldlinien, welche durch deren Flächengeschwindigkeit beschrieben wird. Dieser Vektor spielte schon bisher in der Elektrodynamik eine fundamentale Rolle und wurde in Unkenntnis seiner wahren Bedeutung als magnetische Feldstärke bezeichnet. Die erste Grundgleichung der Elektronentheorie von H. A. Lorentz entpuppt sich nunmehr als die Kontinuitätsgleichung der elektrischen Feldlinien, die zweite ist das dynamische Grundgesetz der Linienmechanik. Dieses ist so beschaffen, daß es die Flächengeschwindigkeit der elektrischen Feldlinien quellenfrei beläßt, was in der Forderung der Quellenfreiheit der magnetischen Feldstärke in der Elektronentheorie von H. A. Lorentz zum Ausdruck kam. — § 2. Die dynamische Grundgleichung der Linienmechanik wird zunächst am Spezialfall der ebenen elektrischen Elementarwellen erläutert. Ihre durch H. A. Lorentz ausgeführte Umformung auf punktmechanische Gestalt wird diskutiert. Die hierbei von diesem aufgestellte Formel der Elektronentheorie für die elektromagnetische Bewegungsgröße ist aber erst linienmechanisch verständlich geworden. Auch eine einfachere Umformung des dynamischen Grundgesetzes wird entwickelt. Die Vorteile der dynamischen Grundgleichung in ihrer einfachen Formulierung der Linienmechanik gegenüber der punktmechanischen Gestalt werden allgemein erörtert. — § 3. Durch drei skalare Funktionen, welche die Bewegung der elektrischen Feldlinien und der Ladung bestimmen, konnte H. Bateman die elektromagnetischen Feldgrößen definieren und die rein kinematischen Grundgleichungen der Elektrodynamik erhalten. Die hierzu nötigen Definitionen und Herleitungen werden entwickelt. Ein wirkliches elektrisches Feld hat nur noch die dynamische Grundgleichung der Linienmechanik zu befriedigen, welche eine trilineare, homogene Differentialgleichung für die drei Batemanschen Funktionen nach sich zieht. Diese definieren auch eine punktweise räumliche Abbildung, wobei das Bildvolumen gleich der im abgebildeten Volumen enthaltenen Ladung ist, woraus sich gut verwertbare Beziehungen entnehmen lassen. — § 4. Statt auf die übliche Weise durch unanschauliche Potentiale kann die Berechnung des elektromagnetischen Feldes auch mittels der Batemanschen Funktionen erfolgen, denen an sich eine klare Bedeutung zukommt. Die Methode wird am Beispiel des statischen elektrischen Elementarfeldes und des axialsymmetrischen dynamischen Elementarfeldes vorgeführt.

Einleitung.

„Für Faraday war es geradezu ein Axiom oder, wenn sie es vorziehen, ein Dogma, daß die Materie nicht da wirken kann, wo sie nicht ist. Faraday besaß nach meiner Ansicht einen mathematischen Scharfsinn ohnegleichen, allein er hatte keine Schulung in der Analysis. Daher konnten die großen Vorteile, welche die Vorstellung der Fernwirkung für die mathematische Behandlung bietet, seinen Widerwillen nicht mildern, den er gegen die Vorstellung von Kräften empfand, die weit entfernt von ihrer Basis und ohne physischen Zusammenhang mit ihrem Ursprung wirksam sind. Er suchte sich daher die Wirkungen im elektrischen Felde durch ein Bild zu veranschaulichen, in welchem die Vorstellung der Fernwirkung durch etwas anderes ersetzt war, wodurch zwischen den aufeinander einwirkenden Körpern ein kontinuierlicher Zusammenhang hergestellt wurde. Dies gelang ihm durch den Begriff der Kraftlinien.“ So sagt J. J. Thomson in seinen Silliman-Vorlesungen.¹ Den Vorstellungen Faradays noch in weiterem Maße zum Durchbruch zu verhelfen, als dies bereits durch Maxwell geschehen war, bemühte sich J. J. Thomson in besonderem Maße.

¹ Elektrizität und Materie, 2. Aufl., S. 5. Braunschweig: Vieweg u. Sohn. 1909.

Diesen Bestrebungen schloß sich auch Norman R. Campbell an. Über Faradays Theorie äußerte sich dieser:²

„Faraday nahm an, daß der in der Umgebung von geladenen Körpern liegende Raum von ‚Kraftlinien‘ durchzogen wird, deren Enden mit Körpern fest verbunden sind, die mit Elektrizität von verschiedenem Vorzeichen geladen sind. Die Linien verhalten sich ähnlich wie elastische Fäden, indem sie sich dauernd zusammenziehen und dadurch die Anziehung der entgegengesetzten Ladungen an ihren Enden verursachen. Sie unterscheiden sich von elastischen Fäden dadurch, daß ihre Zusammenziehung unabhängig von ihrer Länge ist und daß benachbarte Linien sich abzustößen suchen.“

Aber erst als der Verfasser mit modernen Mitteln den Schwierigkeiten zu Leibe rückte, gelang ihm in einer Reihe von Abhandlungen, die Elektrodynamik auf eine ganz neue Grundlage zu stellen und die Fundamente der klassischen Physik so zu vertiefen, daß nicht nur alte Schwierigkeiten endlich eine befriedigende Lösung fanden, sondern begründete Aussicht besteht, auch für die neuere Entwicklung der Physik geeigneteren Unterlagen gewonnen zu haben.³ Durch eine Fortentwicklung der Dynamik, über die Newtonsche hinaus, gelang eine Neuformulierung der Faradayschen Theorie auf mechanischer Grundlage, über deren nunmehrigen Entwicklungsstand die vorliegende Abhandlung berichten soll.

§ 1. Grundgleichungen.

Der Verfasser hat die Elektronentheorie dahingehend erweitert, daß nicht nur die elektrische Ladung, sondern auch das elektrische Feld atomistische Struktur besitzt. Die elektrischen Felder der elektrischen Elementarladungen sind die Atome des elektrischen Feldes und werden als elektrische Elementarfelder bezeichnet. Die elektrische Erregung im elektrischen Elementarfeld der Elementarladung e wird durch die Formel dargestellt⁴

$$\mathfrak{D} = \frac{e}{4 \pi r^2} \text{ grad } r, \quad (1)$$

Coulombsches Gesetz. Ein Stromleiterstück von der durch den Vektor \mathbf{l} gegebenen Länge und Orientierung erzeugt beim Hindurchfließen eines elektrischen Stromes von der Stromstärke J ein Magnetfeld von der Feldstärke

$$\mathfrak{H} = \frac{J [\mathbf{l} \text{ grad } r]}{4 \pi r^2},$$

Laplace (Biot und Savart)sches Gesetz. Der Strom kommt durch die das Leiterstück durchfließenden Elementarladungen zustande, so daß die Beziehung gilt⁵

$$\sum e_i \mathbf{v}_i = J \mathbf{l}.$$

Das Magnetfeld des stromdurchflossenen Leiterstückes ist also auch durch die Formel gegeben

$$\mathfrak{H} = \frac{\sum e_i [\mathbf{v}_i \text{ grad } r]}{4 \pi r^2}.$$

Die einzelne Elementarladung e erzeugt bei ihrer Bewegung mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} somit das Magnetfeld

$$\mathfrak{H} = \frac{e [\mathbf{v} \text{ grad } r]}{4 \pi r^2}. \quad (2)$$

² Moderne Elektrizitätslehre, S. 6 und 7. Dresden und Leipzig: Theodor Steinkopff. 1913.

³ In dieser Zeitschrift berichtete darüber bereits der Aufsatz des Verfassers: Der Mechanismus des elektrischen Feldes, H. 1/2, 105—117 (1946).

⁴ Der Mechanismus des elektrischen Feldes, Gl. (13).

⁵ Der Mechanismus des elektrischen Feldes, Gl. (16).

Natürlich ist diese Formel nur gültig bei quasistationärer Bewegung der elektrischen Ladung, wie man sie bei der elektrischen Strömung in Leitern voraussetzen darf. Sie ist solange richtig, als man noch voraussetzen darf, daß die bewegte Ladung ihr Feld ohne jede Deformation, wie starr verbunden, mit sich führt, was bei genügend kleinen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen immer erlaubt ist. Unter diesen Voraussetzungen kann man sie aber mittels (1) auch umformen zu

$$\mathfrak{H} = [v \mathfrak{D}]. \quad (3)$$

Hierin bedeutet jedoch v zugleich auch die Geschwindigkeit der elektrischen Feldlinien. Demnach erzeugen elektrische Erregungslinien, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegen, ein Magnetfeld, das durch die Formel (3) bestimmt ist. Während das Coulombsche Gesetz (1) und das Laplace (Biot und Savart)sche Gesetz (2) Fernwirkungsgesetze bedeuten, stellt ihre Umformung (3) ein Nahwirkungsgesetz dar und entspricht also der Faradayschen Theorie. Bei der Herleitung der Formel (3) waren zwar Einschränkungen über Geschwindigkeit und Beschleunigung der Zentralladung zu machen gewesen. Bei ihrer Formulierung als Nahwirkungsgesetz spielt aber die felderzeugende Ladung keine Rolle mehr und wir haben allen Grund, diese Formel für den Zusammenhang zwischen bewegter elektrischer Feldlinie und erzeugter magnetischer Feldstärke als strenge gültig anzusehen. Dieses Gesetz bei den Physikern allgemein zur Geltung zu bringen, hatte sich J. J. Thomson ganz besonders eingesetzt.

Der Verfasser hat in seiner Neufassung der Theorie der Elektrizität die Formel (3) herangezogen, um die magnetische Feldstärke einfach als Vektor der Flächengeschwindigkeit der elektrischen Feldlinien zu definieren.⁶ Während er das elektrische Feld als materieller Natur auffaßt, erhält so das Magnetfeld bloß die Bedeutung des Geschwindigkeitsfeldes der elektrischen Feldmaterie.

Das elektrische Feld ist mit der elektrischen Ladungsdichte ϱ durch die Formel

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho \quad (4)$$

verknüpft. Die elektrische Feldmaterie ist unzerstörbar, soweit es die elektrische Ladung ist. Auch die elektrischen Feldlinienröhren der elektrischen Elementarfelder bleiben mit der Kontinuität der elektrischen Ladungen erhalten und können bloß ihre Verteilung durch Bewegung verändern.

Die zeitliche Änderung des Flusses der elektrischen Erregungslinien

$$\Phi = \int (\mathfrak{D} df)$$

durch eine bewegte und dabei biegsam und dehnbar gedachte berandete Fläche ist durch die Formel gegeben⁷

$$\frac{d}{dt} \int (\mathfrak{D} df) = \int (\dot{\mathfrak{D}} df)$$

mit

$$\dot{\mathfrak{D}} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + v \operatorname{div} \mathfrak{D} - \operatorname{rot} [v \mathfrak{D}],$$

worin v die Geschwindigkeit der Flächenpunkte bedeutet. Bewegt sich die Fläche mit der Ladung und elektrischen Erregung mit, so ist v die Geschwindigkeit der elektrischen Feldlinien und ihrer Quell-Ladung und dann ist notwendig

$$\dot{\mathfrak{D}} = 0.$$

Für das elektrische Feld muß also die Kontinuitätsgleichung bestehen

$$\operatorname{rot} [v \mathfrak{D}] = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + v \operatorname{div} \mathfrak{D} \quad (5)$$

⁶ Der Mechanismus des elektrischen Feldes, Gl. (12).

⁷ Abraham-Becker: Theorie der Elektrizität, Bd. I, § 19.

als Bedingung dafür, daß bei der Bewegung der elektrischen Erregung und ihrer Quellen mit der räumlich und zeitlich variablen Geschwindigkeit v elektrische Erregungslinien und Ladung nur ihre Dichteverteilung ändern können.⁸

Aus den Gl. (3), (4) und (5) folgert man

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho v, \quad (6)$$

die erste Hauptgleichung der Elektronentheorie von H. A. Lorentz. Diese stellt also weiter nichts als die Kontinuitätsgleichung des elektrischen Feldes dar. Wegen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= 0 \\ 0 &= \frac{\partial \operatorname{div} \mathfrak{D}}{\partial t} + \operatorname{div} \{\varrho v\}. \end{aligned}$$

Nach (4) bedeutet dies

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \{\varrho v\} = 0,$$

die Kontinuitätsgleichung der elektrischen Ladung. Diese ergibt sich also als unmittelbare Folgerung aus der Kontinuitätsgleichung des elektrischen Feldes.

Von besonderer praktischer Bedeutung in der Elektrodynamik ist das Faradaysche Induktionsgesetz, das sich für den leeren Raum auch schreiben läßt

$$\oint (\mathfrak{D} d\mathfrak{s}) = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int (\mathfrak{H} df). \quad (7)$$

Es liefert unmittelbar die zweite Hauptgleichung der Elektronentheorie von H. A. Lorentz

$$\operatorname{rot} \mathfrak{D} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \quad (8)$$

Nach unserer Auffassung von der Bedeutung der magnetischen Feldstärke stellt die zeitliche Ableitung dieser Größe nichts anderes als die Flächenbeschleunigung der elektrischen Feldlinien dar. Die Gl. (8), welche diese Größe bestimmt, hat demnach die Bedeutung der dynamischen Grundgleichung der elektrischen Feldmaterie in ihrer einfachsten Gestalt. Aus ihr erkennt man unmittelbar, daß statische und stationäre elektrische Felder, in denen keine Beschleunigung der Feldlinien auftritt, notwendig wirbelfrei sein müssen. Nur Wirbel der elektrischen Erregung rufen eine diesen proportionale Flächenbeschleunigung der elektrischen Feldlinien hervor.

Die Hauptgleichungen der Elektronentheorie sind also analoger Natur wie etwa die Grundgleichungen der Hydromechanik. Gl. (6) ist eine Kontinuitätsgleichung, Gl. (8) eine dynamische Grundgleichung. Während aber die Hydrodynamik die Bewegung von Flüssigkeitsteilchen beschreibt, handelt die Elektronentheorie von der Bewegung von Feldlinien. Die Hydrodynamik ist demnach eine Punktmechanik, die Elektrodynamik aber eine Linienmechanik. Solange man nur die Punktmechanik kannte, stieß die mechanische Erklärung der Elektrodynamik auf Schwierigkeiten. Nunmehr stellt sich heraus, daß eine besondere mechanische Erklärung der Elektrodynamik überflüssig war, denn sie ist selbst Mechanik, aber einer den besonderen Verhältnissen entsprechenden Art, nämlich Linienmechanik.

Wegen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{D} &= 0 \\ \text{folgt aus (8)} \quad \frac{\partial \operatorname{div} \mathfrak{H}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Demnach ist $\operatorname{div} \mathfrak{H}$ zeitlich unveränderlich; den Wert, den $\operatorname{div} \mathfrak{H}$ in irgendeinem speziellen Zustand besitzt, den muß sie auch in jedem anderen Zustand haben. Für

⁸ Eine direkte Herleitung der Formel (5) findet man in der Abhandlung des Verfassers: Algebraische Elektrodynamik. S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa 144, 246—248 (1935).

das statische elektrische Elementarfeld ist $v \equiv 0$, nach (3) ist dann auch $\mathfrak{E} \equiv 0$; somit folgt

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 \quad (9)$$

in diesem Falle und auch allgemein, da man ja beliebige spezielle Zustände ineinander überführen kann.

Die Formeln (4), (6), (8) und (9) stellen sämtliche Differentialgleichungen der Elektronentheorie von H. A. Lorentz dar. Als die grundlegenden Gleichungen der Elektronen-Feldtheorie muß man wohl die Formeln (3), (4), (6) und (8) bezeichnen. Aus diesen haben sich jene folgern lassen. Die Grundgleichungen der Elektronentheorie von H. A. Lorentz waren aber Spezialisierungen der axiomatischen Maxwell'schen Gleichungen, deren Wahrheitsgehalt man nur in der Richtigkeit der aus ihnen gezogenen Folgerungen erblickte. Die Grundgleichungen der Elektronen-Feldtheorie sind hingegen schon unmittelbar verständlich und von einem Bau, der sich sinngemäß in die auf mechanischer Grundlage aufgebaute Physik einfügt.

§ 2. Linienmechanik.

Der dynamischen Grundgleichung der Linienmechanik § 1 (8) geben wir die sinngemäße Gestalt

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = -c^2 \operatorname{rot} \mathfrak{D}. \quad (1)$$

Der größeren Einfachheit halber wollen wir diese Gleichung zunächst speziell für den Fall der ebenen elektrischen Elementarwellen

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^0 + \mathfrak{D}^* \quad (2)$$

diskutieren, wobei wir

$$\mathfrak{D}^0 = \text{const} \quad (3)$$

und

$$\mathfrak{D}^* = D^*(x, t) \mathfrak{i} \quad (4)$$

voraussetzen.⁹ Dann erhält man aus (1)

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = -c^2 [\operatorname{grad} D^*, \mathfrak{j}].$$

Wegen

$$\operatorname{grad} D^*(x, t) = \frac{\partial D^*}{\partial x} \mathfrak{i}$$

folgt weiter

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial D^*}{\partial x} \mathfrak{k}.$$

Die Flächenbeschleunigung der elektrischen Feldlinien erfolgt also nach der Ebene ihres größten Dichteabfalles. Eine Stelle größerer Zusammendrängung elektrischer Feldlinien ist daher bestrebt, deren Auflockerung hervorzurufen, eine Stelle geringerer Dichte ihr Zusammenrücken. So wirkt sich die dynamische Grundgleichung der Linienmechanik (1) in dem diskutierten Falle aus und das Analoge haben wir auch allgemein zu erwarten.

Bisher suchte man der Felddynamik bloß eine der Punktmechanik analoge Gestalt zu geben. Man bildete aus § 1 (8) zunächst

$$[\mathfrak{D} \operatorname{rot} \mathfrak{D}] = -\frac{1}{c^2} \left[\mathfrak{D} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \right].$$

Unter Verwendung von¹⁰

$$\varepsilon \mu = \frac{1}{c^2}$$

⁹ Der Mechanismus des elektrischen Feldes, Gl. (1), (3) und (4) zufolge.

¹⁰ Der Mechanismus des elektrischen Feldes, Gl. (27).

kann man umformen in

$$\varepsilon \mu \left[\mathfrak{D} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right] = [\text{rot } \mathfrak{D}, \mathfrak{D}]. \quad (5)$$

Macht man die Hilfsrechnung

$$[[\nabla \mathfrak{D}] \mathfrak{D}_e] = (\nabla \mathfrak{D}) \mathfrak{D} - \frac{1}{2} \nabla (\mathfrak{D}^2)$$

und weiter

$$[[\nabla \mathfrak{D}] \mathfrak{D}_e] + \mathfrak{D} (\nabla \mathfrak{D}) = (\nabla, \mathfrak{D} \mathfrak{D} - \frac{1}{2} (\mathfrak{D}^2) I),$$

so wird man auf den Maxwellschen Spannungstensor \mathcal{T}^e des elektrischen Feldes geführt, der durch

$$\varepsilon \mathcal{T}^e = \mathfrak{D} \mathfrak{D} - \frac{1}{2} (\mathfrak{D}^2) I \quad (6)$$

definiert ist. Das Ergebnis der Hilfsrechnung schreibt sich damit

$$[\text{rot } \mathfrak{D}, \mathfrak{D}] + \mathfrak{D} \text{div } \mathfrak{D} = \varepsilon \text{div } \mathcal{T}^e.$$

Unter Heranziehung von § 1 (4) folgt schließlich aus (5)

$$\mu \left[\mathfrak{D} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right] + \frac{\varrho}{\varepsilon} \mathfrak{D} = \text{div } \mathcal{T}^e. \quad (7)$$

Aus § 1 (6) bildete man analog

$$[\mathfrak{H} \text{rot } \mathfrak{H}] = \left[\mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \right] + \varrho [\mathfrak{H} \mathfrak{v}].$$

Man kann umformen in

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \mathfrak{H} \right] + \varrho [\mathfrak{v} \mathfrak{H}] = [\text{rot } \mathfrak{H}, \mathfrak{H}]. \quad (8)$$

Man macht die gleichartige Hilfsrechnung

$$[[\nabla \mathfrak{H}] \mathfrak{H}_e] = (\nabla \mathfrak{H}) \mathfrak{H} - \frac{1}{2} \nabla (\mathfrak{H}^2)$$

und weiter

$$[[\nabla \mathfrak{H}] \mathfrak{H}_e] + \mathfrak{H} (\nabla \mathfrak{H}) = \left(\nabla, \mathfrak{H} \mathfrak{H} - \frac{1}{2} (\mathfrak{H}^2) I \right),$$

so wird man auf den Maxwellschen Spannungstensor \mathcal{T}^m des magnetischen Feldes geführt, der durch

$$\frac{1}{\mu} \mathcal{T}^m = \mathfrak{H} \mathfrak{H} - \frac{1}{2} (\mathfrak{H}^2) I \quad (9)$$

definiert ist. Damit schreibt sich das Ergebnis der Hilfsrechnung

$$[\text{rot } \mathfrak{H}, \mathfrak{H}] + \mathfrak{H} \text{div } \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \text{div } \mathcal{T}^m.$$

Unter Heranziehung von § 1 (9) folgt schließlich aus (8)

$$\mu \left[\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \mathfrak{H} \right] + \mu \varrho [\mathfrak{v} \mathfrak{H}] = \text{div } \mathcal{T}^m. \quad (10)$$

Durch Addition von (7) und (10) erhält man

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{D} \mathfrak{H}] + \varrho \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{D} + \mu [\mathfrak{v} \mathfrak{H}] \right\} = \text{div } \{ \mathcal{T}^e + \mathcal{T}^m \}.$$

Den Ausdruck

$$\mathfrak{g} = \mu [\mathfrak{D} \mathfrak{H}] \quad (11)$$

bezeichnete man als elektromagnetische Impulsdichte, der Ausdruck

$$\mathfrak{k}_p = \frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{D} + \mu [\mathfrak{v} \mathfrak{H}] \quad (12)$$

wurde ponderomotorische Kraftdichte genannt und bedeutet die auf die Ladung der Volumseinheit wirkende Kraft. Ferner bedeutet

$$\mathfrak{k}_s = \text{div } \{ \mathcal{T}^e + \mathcal{T}^m \} \quad (13)$$

die Kraftdichte der Maxwellschen Spannungen des elektromagnetischen Feldes. Unter Verwendung dieser Bezeichnungen schreibt sich die dynamische Grundgleichung nunmehr

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \varrho \mathfrak{f}_p = \mathfrak{f}_s. \quad (14)$$

Sie hat tatsächlich einen der Punktmechanik analogen Bau.

Der Ausdruck (11) der Elektronentheorie von H. A. Lorentz hat aber den Charakter einer linienmechanischen Formel, da er die elektromagnetische Impulsdichte als Linearform der Flächengeschwindigkeit \mathfrak{H} der elektrischen Feldlinien darstellt. Ihren Faktor

$$m = \mu \mathfrak{D} \quad (15)$$

muß man wohl als vektorielle Massendichte des elektrischen Feldes auffassen; dann kommt auch die Schreibweise der Formel (11) in der Gestalt

$$g = [m \mathfrak{H}] \quad (16)$$

dem aus der Punktmechanik Geläufigen am nächsten. Aber der linienmechanische Charakter des Ausdrucks kommt darin zur Geltung, daß die Impulsdichte als Vektorprodukt aus vektorieller Massendichte und Flächengeschwindigkeit der elektrischen Feldlinien dargestellt ist. In der vektoriellen Massendichte kommt die Linienstruktur der elektrischen Feldmaterie zum Ausdruck.

Die Kraftdichte der Maxwellschen Spannungen des elektrischen Feldes allein ist

$$\mathfrak{f}_s^e = \text{div } T^e$$

und seine ponderomotorische Kraftdichte

$$\mathfrak{f}_p^e = \frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{D}.$$

Mit diesen Bezeichnungen und bei Verwendung von (15) schreibt sich (7)

$$\left[m \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right] + \varrho \mathfrak{f}_p^e = \mathfrak{f}_s^e. \quad (17)$$

Der Herleitung von (7) gemäß stellt diese Formel eine bloße Umformung der dynamischen Grundgleichung der Linienmechanik (1) oder § 1 (8) dar. Ihr erstes Glied links hat den Bau eines Vektorproduktes aus vektorieller Massendichte und Flächenbeschleunigung. Dieses stellt also die Dichte des Trägheitswiderstandes der elektrischen Feldmaterie dar und hat also gleichfalls seine linienmechanische Besonderheit. Sonst ist (17) der üblichen Form der dynamischen Grundgleichung der Punktmechanik ganz analog gebaut.

Die Kraftdichte der Maxwellschen Spannungen des magnetischen Feldes allein ist

$$\mathfrak{f}_s^m = \text{div } T^m$$

und seine ponderomotorische Kraftdichte

$$\mathfrak{f}_p^m = \mu [\mathfrak{v} \mathfrak{H}].$$

Mit diesen Bezeichnungen und bei Verwendung von (15) schreibt sich (10)

$$\left[\frac{\partial m}{\partial t} \mathfrak{H} \right] + \varrho \mathfrak{f}_p^m = \mathfrak{f}_s^m. \quad (18)$$

Nach der durch Formel § 1 (3) ausgedrückten grundlegenden Voraussetzung der Elektronen-Feldtheorie stellt das Magnetfeld ein bloßes Geschwindigkeitsfeld dar. Die Kräfte des Magnetfeldes wirken nach (18) auf die Feldmaterie masseändernd, die Kräfte des elektrischen Feldes suchen nach (17) dessen Flächengeschwindigkeit abzuändern. Die Summe von (17) und (18) ergibt zufolge (16) die dynamische Grundgleichung (14). Bei Verwendung der dynamischen Grundgleichung in der Gestalt (14) hat man also die Kräfte und Spannungen des Geschwindigkeitsfeldes der elektrischen

Feldmaterie mit in Rechnung zu stellen. Die dynamische Grundgleichung in der Gestalt (17) erfordert nur die Berücksichtigung der Kräfte und Spannungen des elektrischen Feldes allein.

Der Übergang zu den punktmechanischen Umformungen der dynamischen Grundgleichung ist erforderlich, wenn die Dynamik der Elektronen zu behandeln ist. Für die Dynamik der Feldmaterie selbst ist das Einfachste und Anschaulichste die Verwendung der dynamischen Grundgleichung (1). Die Rolle des so häufigen Gradienten im Kraftglied der Punktmechanik übernimmt der Rotor in der Linienmechanik. Als axialer Vektor ist der Rotor der elektrischen Erregung gerade das geeignete Instrument zur Bestimmung des axialen Vektors der Flächenbeschleunigung der elektrischen Feldlinien. Der Zusammenhang dieser Größen ist der denkbar einfachste; beide sind nur um einen konstanten Faktor verschieden. Der Rotorvektor bestimmt durch seine Normalfläche für die bestimmte Stelle die Ebene, in welcher das Feld sich rotorisch am raschesten ändert. Die Grundgleichung (1) sagt aus, daß in der gleichen Ebene auch die Flächenbeschleunigung der elektrischen Feldlinien erfolgt, der Größe nach in einem konstanten Verhältnis zum rotorischen Abfall der elektrischen Erregung. In diesem einfachen Bau des Grundgesetzes der Dynamik der Feldmaterie haben wir die Urform allen dynamischen Verhaltens zu erblicken.

§ 3. Linienkinematik.

Die hauptsächlich von J. J. Thomson vertretene Theorie der Bewegung elektrischer Feldlinienröhren wurde in einer großen Zahl von Abhandlungen von H. Bateman mathematisch vertieft.¹¹ Er geht aus von drei eindeutigen Funktionen

$$\left. \begin{aligned} X &= X(x, y, z, t), \\ Y &= Y(x, y, z, t), \\ Z &= Z(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Diese definieren zunächst die Schar bewegter elektrischer Erregungslinien durch Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} Y(x, y, z, t) &= \text{const}, \\ Z(x, y, z, t) &= \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wobei die rechten Seiten als unabhängige Parameter aufzufassen sind. Dann läßt sich zeigen, daß die elektrische Erregung durch den Ausdruck definiert werden kann

$$\mathfrak{D} = X [\text{grad } Y, \text{grad } Z]. \quad (3)$$

Man findet zunächst daraus

$$\text{div } \mathfrak{D} = (\text{grad } X [\text{grad } Y, \text{grad } Z]) + X \text{div} [\text{grad } Y, \text{grad } Z].$$

Die vektoranalytische Formel

$$\text{div} [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = \mathfrak{B} \text{rot } \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \text{rot } \mathfrak{B}$$

ergibt

$$\text{rot grad } Y = \text{rot grad } Z = 0$$

zufolge

$$\text{div} [\text{grad } Y, \text{grad } Z] = 0.$$

Es bleibt also nur bestehen

$$\text{div } \mathfrak{D} = (\text{grad } X [\text{grad } Y, \text{grad } Z]). \quad (4)$$

Nach § 1 (4) ist somit die elektrische Ladungsdichte durch die Formel gegeben

$$\varrho = ([\text{grad } X, \text{grad } Y, \text{grad } Z]). \quad (5)$$

¹¹ Philos. Mag. J. Sci. (6), 34, 405 (1917), wo die weiteren Literaturhinweise zu finden sind.

Nimmt man zu (2) noch die Gleichung

$$X(x, y, z, t) = \text{const.} \quad (6)$$

hinzu, so ist durch diese drei Gleichungen die Bewegung von Punkten

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

definiert, die sich mit Ladung und Feld mitbewegen. Für die Geschwindigkeit dieser Bewegung von elektrischer Ladung und elektrischer Erregung

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

folgen die Bedingungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{v} \text{ grad } X) + \frac{\partial X}{\partial t} &= 0, \\ (\mathbf{v} \text{ grad } Y) + \frac{\partial Y}{\partial t} &= 0, \\ (\mathbf{v} \text{ grad } Z) + \frac{\partial Z}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgert man weiter

$$\text{grad } Y (\mathbf{v} \text{ grad } Z) - \text{grad } Z (\mathbf{v} \text{ grad } Y) + \frac{\partial Z}{\partial t} \text{ grad } Y - \frac{\partial Y}{\partial t} \text{ grad } Z = 0,$$

das ist

$$[\mathbf{v} [\text{grad } Y, \text{grad } Z]] = \frac{\partial Y}{\partial t} \text{ grad } Z - \frac{\partial Z}{\partial t} \text{ grad } Y.$$

Multiplikation mit X ergibt nach (3)

$$[\mathbf{v} \mathfrak{D}] = X \left\{ \frac{\partial Y}{\partial t} \text{ grad } Z - \frac{\partial Z}{\partial t} \text{ grad } Y \right\}.$$

So haben wir also die Formel für die Flächengeschwindigkeit der elektrischen Feldlinien erhalten, die wir nach § 1 (3) schreiben

$$\mathfrak{H} = X \left\{ \frac{\partial Y}{\partial t} \text{ grad } Z - \frac{\partial Z}{\partial t} \text{ grad } Y \right\}. \quad (8)$$

Man berechnet daraus

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{H} &= [\text{grad } (X \frac{\partial Y}{\partial t}), \text{grad } Z] + [\text{grad } Y, \text{grad } (X \frac{\partial Z}{\partial t})] = \\ &= X \left\{ \left[\text{grad } \frac{\partial Y}{\partial t}, \text{grad } Z \right] + \left[\text{grad } Y, \text{grad } \frac{\partial Z}{\partial t} \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{\partial Y}{\partial t} [\text{grad } X, \text{grad } Z] + \frac{\partial Z}{\partial t} [\text{grad } Y, \text{grad } X] = \\ &= X \frac{\partial}{\partial t} [\text{grad } Y, \text{grad } Z] - \frac{\partial Y}{\partial t} [\text{grad } Z, \text{grad } X] - \frac{\partial Z}{\partial t} [\text{grad } X, \text{grad } Y]. \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus (3)

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = X \frac{\partial}{\partial t} [\text{grad } Y, \text{grad } Z] + \frac{\partial X}{\partial t} [\text{grad } Y, \text{grad } Z].$$

Damit erhält man weiter

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} - \frac{\partial X}{\partial t} [\text{grad } Y, \text{grad } Z] - \frac{\partial Y}{\partial t} [\text{grad } Z, \text{grad } X] - \frac{\partial Z}{\partial t} [\text{grad } X, \text{grad } Y]$$

und mittels (7) schließlich

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{H} &= \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad } X) [\text{grad } Y, \text{grad } Z] + \\ &\quad + (\mathbf{v} \text{ grad } Y) [\text{grad } Z, \text{grad } X] + (\mathbf{v} \text{ grad } Z) [\text{grad } X, \text{grad } Y]. \end{aligned} \quad (9)$$

Versuchen wir die Vektordarstellung

$$\mathbf{v} = u [\text{grad } Y, \text{grad } Z] + v [\text{grad } Z, \text{grad } X] + w [\text{grad } X, \text{grad } Y], \quad (10)$$

so erhalten wir daraus zur Bestimmung der Koeffizienten u , v , w die Gleichungen

$$\begin{aligned} (v \operatorname{grad} X) &= u ([\operatorname{grad} X, \operatorname{grad} Y, \operatorname{grad} Z]), \\ (v \operatorname{grad} Y) &= v ([\operatorname{grad} X, \operatorname{grad} Y, \operatorname{grad} Z]), \\ (v \operatorname{grad} Z) &= w ([\operatorname{grad} X, \operatorname{grad} Y, \operatorname{grad} Z]). \end{aligned}$$

Multipliziert man nunmehr Gl. (10) mit Gl. (5), die linke Seite mit der linken, die rechte Seite mit der rechten, so erhält man den zuletzt abgeleiteten Relationen zufolge

$$\begin{aligned} \varrho v &= (v \operatorname{grad} X) [\operatorname{grad} Y, \operatorname{grad} Z] + (v \operatorname{grad} Y) [\operatorname{grad} Z, \operatorname{grad} X] + \\ &+ (v \operatorname{grad} Z) [\operatorname{grad} X, \operatorname{grad} Y]. \end{aligned}$$

Demnach bedeutet (9)

$$\operatorname{rot} \mathfrak{S} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho v, \quad (11)$$

die Kontinuitätsgleichung der elektrischen Feldlinien § 1 (6).

Man erkennt also, daß man mit Hilfe der Ansätze (1), (3) und (5) die folgenden Grundgleichungen der Elektronen-Feldtheorie rein kinematisch befriedigt: § 1 (3), § 1 (4) und § 1 (6). Dazu konnten die drei Funktionen des Ansatzes (1) beliebig eindeutig ausgewählt werden. Ein elektrisches Feld muß aber auch die dynamische Grundgleichung der Linienmechanik § 1 (8) befriedigen. Dadurch werden den Ansatzfunktionen Bedingungen auferlegt. Durch Heranziehung von (3) und (8) schreiben sich diese

$$\operatorname{rot} \{X [\operatorname{grad} Y, \operatorname{grad} Z]\} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ X \frac{\partial Y}{\partial t} \operatorname{grad} Z - X \frac{\partial Z}{\partial t} \operatorname{grad} Y \right\} = 0 \quad (12)$$

und sind trilinear homogen.

Durch die Gleichungen (1) wird eine punktweise Abbildung des r -Raumes mit den kartesischen Koordinaten x , y , z auf den \mathfrak{R} -Raum mit den kartesischen Koordinaten X , Y , Z vermittelt. Die abgebildeten Volumelemente stehen dabei in der Beziehung

$$dV = ([\operatorname{grad} X, \operatorname{grad} Y, \operatorname{grad} Z]) dv.$$

Zufolge (5) bedeutet dies

$$dV = \varrho dv.$$

Die in einem Volumen des r -Raumes enthaltene Ladung ist daher durch die Doppelgleichung bestimmt

$$Q = \int \varrho dv = \int dV. \quad (13)$$

Setzt man die Hülle des Raumgebietes nur aus Flächen der Scharen (2) und (6) zusammen und definiert insbesondere

$$Q = \int_0^X \int_0^Y \int_0^Z dX \cdot dY \cdot dZ,$$

so erhält man durch Integration

$$Q = X \cdot Y \cdot Z. \quad (14)$$

§ 4. Spezielle Felder.

Für die nun folgenden speziellen Anwendungen ist es geeigneter, im r -Raum räumliche Polarkoordinaten einzuführen. Die Feldableitung lautet für sie¹²

$$\nabla = \frac{m}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + n \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}. \quad (1)$$

Wir machen zunächst die Anwendung auf das statische elektrische Elementarfeld, indem wir spezialisieren

$$X = X(r), \quad Y = Y(\vartheta), \quad Z = Z(\varphi). \quad (2)$$

¹² Siehe die Arbeit des Verfassers in den S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa (1944): Der Mechanismus elektromagnetischer Wellen, § 3, Gl. (83).

Dann reduziert sich die Bedingungsgleichung § 3 (12) auf

$$\operatorname{rot} \left\{ X(r) \left[\frac{v}{r} \frac{dY}{d\vartheta}, \frac{m}{r \sin \vartheta} \frac{dZ}{d\varphi} \right] \right\} = 0$$

und ergibt reduziert

$$\operatorname{rot} \left\{ \frac{X}{r^2 \sin \vartheta} \frac{dY}{d\vartheta} \frac{dZ}{d\varphi} n \right\} = 0. \quad (3)$$

Man rechnet nach (1)

$$\operatorname{rot} n = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[m \frac{\partial n}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{r} \left[v \frac{\partial n}{\partial \vartheta} \right].$$

Es ist¹³

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial \varphi} &= m \sin \vartheta, & \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= m \cos \vartheta, \\ \frac{\partial n}{\partial \vartheta} &= v, & \frac{\partial v}{\partial \vartheta} &= -n. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Daraus ergibt sich

$$\left[m \frac{\partial n}{\partial \varphi} \right] = \left[v \frac{\partial n}{\partial \vartheta} \right] = 0$$

und so folgt

$$\operatorname{rot} n = 0. \quad (5)$$

Man erhält daher aus (3) weiter

$$\left[\operatorname{grad} \left(\frac{X}{r^2 \sin \vartheta} \frac{dY}{d\vartheta} \frac{dZ}{d\varphi} \right), n \right] = 0$$

oder

$$[n \nabla] \frac{X}{r^2 \sin \vartheta} \frac{dY}{d\vartheta} \frac{dZ}{d\varphi} = 0. \quad (6)$$

Nach (1) ist

$$[n \nabla] = \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{v}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Man kann somit in (6) den Faktor $\frac{X}{r^2}$ wegekürzen und erhält schließlich

$$m \frac{dZ}{d\varphi} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{dY}{d\vartheta} \right) - v \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{dY}{d\vartheta} \frac{d^2 Z}{d\varphi^2} = 0.$$

Diese Vektorgleichung führt auf die skalaren Gleichungen

$$\frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{dY}{d\vartheta} \right) = 0 \quad (7)$$

und

$$\frac{d^2 Z}{d\varphi^2} = 0. \quad (8)$$

Man erhält zunächst die Zwischenintegrale

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{dY}{d\vartheta} = 1$$

und

$$\frac{dZ}{d\varphi} = 1,$$

wobei die Integrationskonstanten einfach Eins gesetzt werden. Mit den Randbedingungen

$$Y(0) = 0, \quad Z(0) = 0$$

gibt die weitere Integration schließlich die Lösungen

$$Y = 1 - \cos \vartheta, \quad (9)$$

$$Z = \varphi. \quad (10)$$

¹³ Der Mechanismus elektromagnetischer Wellen, § 3, Gl. (6), (81) und (82) zufolge.

Dagegen bleibt

$$X = X(r)$$

vorläufig noch unbestimmt.

Mittels (1) folgert man nunmehr weiter

$$\text{grad } X = \frac{dX}{dr} n, \quad \text{grad } Y = \frac{\sin \vartheta}{r} o, \quad \text{grad } Z = \frac{1}{r \sin \vartheta} m. \quad (11)$$

Aus § 3 (5) folgt daraus

$$\varrho = \frac{1}{r^2} \frac{dX}{dr}.$$

Das bedeutet zunächst

$$\varrho = \varrho(r) \quad (12)$$

und weiter

$$X = \int_0^r \varrho(r) r^2 dr, \quad (13)$$

wenn man auch hier analog die Randbedingung

$$X(0) = 0$$

voraussetzt. Formel § 3 (14) ergibt (9), (10) und (13) zufolge

$$Q(r, \vartheta, \varphi) = (1 - \cos \vartheta) \varphi \int_0^r \varrho(r) r^2 dr.$$

Der volle Bereich von ϑ und φ liefert

$$Q(r, \pi, 2\pi) = 4\pi \int_0^r \varrho(r) r^2 dr.$$

Bedeutet a den Radius der Elementarladung e , so gilt für alle

$$r \geq a$$

notwendig

$$e = 4\pi \int_0^r \varrho(r) r^2 dr.$$

Daher folgt für (13)

$$X = \frac{e}{4\pi} \quad \text{für } r \geq a. \quad (14)$$

Im ladungsfreien Gebiet hat X einen konstanten Wert.

Für § 3 (2) folgt aus (9) und (10)

$$\vartheta = \text{const}, \quad \varphi = \text{const}$$

als Gleichungen der elektrischen Feldlinien, was tatsächlich ein Radialfeld bedeutet.

Formel § 3 (3) liefert für das ladungsfreie Gebiet nach (11) und (14)

$$\mathfrak{D} = \frac{e}{4\pi r^2} n$$

für die elektrische Erregung im statischen elektrischen Elementarfeld, in Übereinstimmung mit der Darstellung § 1 (1).

Auch im dynamischen elektrischen Elementarfeld kann man überall im ladungsfreien Gebiet

$$X = \text{const} \quad (15)$$

voraussetzen. Dann kürzt sich X aus der Bedingungsgleichung § 3 (12) heraus, die sich dann auf

$$\text{rot} [\text{grad } Y, \text{grad } Z] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial Y}{\partial t} \text{grad } Z - \frac{\partial Z}{\partial t} \text{grad } Y \right\} = 0 \quad (16)$$

reduziert. Für ein axialsymmetrisches dynamisches Feld machen wir den Ansatz

$$Y = Y(r, \vartheta, t), \quad Z = Z(\varphi). \quad (17)$$

Es folgt

$$\text{grad } Y = n \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{\vartheta}{r} \frac{\partial Y}{\partial \vartheta}$$

und

$$\text{grad } Z = \frac{m}{r \sin \vartheta} \frac{dZ}{d\varphi}, \quad \frac{\partial Z}{\partial t} = 0. \quad (18)$$

Man erhält zunächst

$$[\text{grad } Y, \text{grad } Z] = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{dZ}{d\varphi} \left\{ n \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} - v \frac{\partial Y}{\partial r} \right\}.$$

Mit Berücksichtigung von (5) findet man weiter

$$\begin{aligned} \text{rot} [\text{grad } Y, \text{grad } Z] &= \left[\text{grad} \left(\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \frac{dZ}{d\varphi} \right), n \right] - \\ &- \left[\text{grad} \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{dZ}{d\varphi} \right), v \right] - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{dZ}{d\varphi} \text{rot } v. \end{aligned} \quad (19)$$

Man erhält der Reihe nach mittels (1)

$$\begin{aligned} &\left[\text{grad} \left(\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \frac{dZ}{d\varphi} \right), n \right] = -[n \nabla] \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \frac{dZ}{d\varphi} = \\ &= \left\{ \frac{v}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right\} \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \frac{dZ}{d\varphi} = \frac{v}{r^3 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \frac{d^2 Z}{d\varphi^2} - \frac{m}{r^3} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) \frac{dZ}{d\varphi}, \\ &- \left[\text{grad} \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{dZ}{d\varphi} \right), v \right] = [v \nabla] \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{dZ}{d\varphi} = \\ &= \left\{ \frac{n}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - m \frac{\partial}{\partial r} \right\} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{dZ}{d\varphi} = \\ &= \frac{n}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{d^2 Z}{d\varphi^2} - \frac{m}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} \frac{dZ}{d\varphi} + \frac{m}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{dZ}{d\varphi} \end{aligned}$$

und

$$\text{rot } v = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[m \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{r} \left[v \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right],$$

Aus (4) folgt

$$\left[m \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] = 0, \quad \left[v \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right] = m$$

und so ist schließlich

$$-\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{dZ}{d\varphi} \text{rot } v = -\frac{m}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{dZ}{d\varphi}.$$

Aus (19) folgt also weiter

$$\begin{aligned} \text{rot} [\text{grad } Y, \text{grad } Z] &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left\{ n \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right\} \frac{d^2 Z}{d\varphi^2} - \\ &- m \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) \right] \frac{dZ}{d\varphi}. \end{aligned}$$

Demzufolge liefert (16) unter Verwendung von (18)

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left\{ n \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right\} \frac{d^2 Z}{d\varphi^2} - \frac{m}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \right] \frac{dZ}{d\varphi} = 0.$$

Diese Vektorgleichung führt auf die skalaren Gleichungen

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad (20)$$

und

$$\frac{d^2 Z}{d\varphi^2} = 0,$$

die letzte stimmt mit (8) überein.

Auch in dem nunmehr behandelten Fall gilt also die Lösung (10)

$$Z = \varphi.$$

Die Formel § 3 (14) hat nunmehr den Bau

$$Q(r, \vartheta, \varphi) = X \cdot \varphi \cdot Y(r, \vartheta, t), \quad (21)$$

insbesondere gilt

$$Q(r, \vartheta, 2\pi) = 2\pi X \cdot Y(r, \vartheta, t).$$

Man kann im ladungsfreien Gebiet in (20) statt Y auch Q schreiben, das sich für den vollen Bereich $\varphi = 2\pi$ nur um einen konstanten Faktor unterscheidet, aber auch im allgemeinen Fall (21) nur um einen Faktor verschieden ist, der von den unabhängigen Variablen der Differentialgleichung nicht abhängt. Das Integrationsproblem der Differentialgleichung (20) hat der Verfasser schon früher eingehend in einer Arbeit behandelt, Die Linienmechanik der elektrischen Feldmaterie.¹⁴

Da auch die Formel aus (11)

$$\text{grad } Z = \frac{1}{r \sin \vartheta} m$$

und ferner in Hinblick auf (18)

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = 0$$

bestehen bleibt, so erhält man nach § 3 (3)

$$\mathfrak{D} = \frac{X}{r \sin \vartheta} [\text{grad } Y, m] \quad (22)$$

und nach § 3 (8)

$$\mathfrak{S} = \frac{X}{r \sin \vartheta} \frac{\partial Y}{\partial t} m. \quad (23)$$

Man kann in diesen für den Bereich des quellenfreien Feldes geltenden Formeln auch willkürlich

$$X = 1$$

setzen, da Y als Integral der homogenen Differentialgleichung (20) ohnehin mit einer willkürlichen Konstanten multipliziert werden kann.

Es liefern also die Gl. (22) und (23) aus den Integralen von (20) unmittelbar die Felder. Die behandelten Spezialfälle haben gezeigt, wie man die linienkinematischen Ausgangsfunktionen § 3 (1) unmittelbar ermitteln und für die Feldberechnung verwenden kann.

Schlußbemerkungen.

Wenn ich diese Abhandlung Karl Wolf zum 60. Geburtstage widme, soll dies auch in Erinnerung daran geschehen, daß wir beide unsere erste gründliche Ausbildung in der Theorie der Elektrizität zusammen erhalten haben als Studenten in der ausgezeichneten Vorlesung unseres unvergeßlichen Lehrers Fritz Hasenöhlrl.

(Eingegangen am 26. September 1946.)

Matrizen, Vektoren und Tensoren.

Von A. Duschek, Wien.

Matrizen, Vektoren und Tensoren sind mathematische Begriffe. Mathematische Begriffe pflegen im allgemeinen eindeutig definiert zu sein, so daß die Entscheidung, ob irgendein Ding unter einen solchen Begriff fällt oder nicht, keinerlei Schwierigkeiten bereitet. Aber bei den oben genannten Begriffen kann man sich nur zu oft des Eindrucks nicht erwehren, daß da etwas nicht in Ordnung ist, denn die Beispiele einer mißverständlichen, oft geradezu falschen Anwendung häufen sich vor allem in der technischen Literatur der letzten Jahre in einer recht auffälligen Weise. Eine Ursache dafür mag sein, daß diese Begriffe irgendwie in Mode gekommen sind — eine bei mathematischen Dingen höchst sonderbare Erscheinung — und daher gerne auch von Leuten verwendet werden, die sich nicht genügend mit ihnen vertraut gemacht haben. Auf der anderen Seite muß aber auch zugegeben werden, daß die

¹⁴ Erscheint in den S.-B. Akad. Wiss. Wien, Äbt. IIa (1946).

Mathematiker als die eigentlich Berufenen und Verantwortlichen hier eine gewisse Unterlassungssünde begangen haben, indem sie sich zu wenig mit den Anwendungen befaßt und manchmal auch eine durch persönliche Vorlieben bedingte einseitige Propaganda für den einen oder anderen Begriff oder Methode getrieben haben. Daß die Begriffe und Methoden der Matrizen- und Tensorrechnung bei richtiger und zweckmäßiger Handhabung auch für den Techniker eine wirklich wertvolle Bereicherung des mathematischen Rüstzeuges sind, darüber kann kein Zweifel bestehen. Ich glaube daher, daß der Versuch, den ich im folgenden machen will, einen Beitrag zur Klärung der Begriffe zu geben, sehr wohl am Platz sein dürfte.¹

Ich beginne mit den Matrizen. Unter einer Matrix versteht man jedes Schema von Zahlen oder Funktionen, den Elementen, die in Form eines Rechtecks mit m Zeilen und n Spalten angeschrieben sind. Die meisten Zahlentabellen fallen unter diesen allgemeinen Begriff. Eines der wichtigsten Anwendungsgebiete des Matrixbegriffes ist die Theorie der linearen Gleichungen und, teilweise damit zusammenhängend, die Theorie der linearen Transformationen

$$y_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad (1)$$

die n^2 Koeffizienten a_{ik} von (1) bilden eine quadratische Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Daß man hier die n^2 Zahlen oder Funktionen a_{ik} , wie es ja allgemein üblich ist, mit einem einzigen gotischen Buchstaben \mathfrak{A} bezeichnet, ist eigentlich ein recht kühnes Unterfangen, über dessen Tragweite man sich im klaren sein soll. Dieses \mathfrak{A} ist ein bloßes Symbol, das über die besondere Art der a_{ik} natürlich gar nichts aussagen kann, sondern uns nur in die Lage versetzt, gewisse allgemeine Beziehungen zwischen Matrizen in einer kurzen und übersichtlichen Weise anzuschreiben. Matrix (2) und Transformation (1) sind eine durch die andere bestimmt. Für derartige Transformationsmatrizen — und nur für diese — gilt ein ganz bestimmtes Multiplikationsgesetz, das sich aus der Zusammensetzung zweier Transformationen ergibt. Ist nämlich neben (1)

$$z_k = \sum_{j=1}^n b_{kj} y_j \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

eine zweite lineare Transformation mit der Matrix

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

so findet man durch Elimination der y_j aus (3) und (1)

$$z_k = \sum_{j=1}^n b_{kj} \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

¹ Den Teil der folgenden Ausführungen, der sich auf die Vektoren und Tensoren bezieht, findet der Leser auch in der Einleitung zu dem demnächst im Springer-Verlag, Wien, erscheinenden Buch: A. Duschek und A. Hochrainer: Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung.

oder wenn man

$$\sum_{j=1}^n b_{kj} a_{ji} = c_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

setzt

$$z_k = \sum_{i=1}^n c_{ki} x_i \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Die Veränderlichen z_i hängen also auch mit den x_i durch eine lineare Transformation zusammen, deren Koeffizienten c_{ki} sich durch die Beziehung (6) aus den Koeffizienten a_{ji} und b_{kj} der beiden ursprünglichen Transformationen berechnen lassen. (7) ist die aus (1) und (3) zusammengesetzte Transformation; es ist aber üblich, die Transformation (7) als das Produkt der beiden Transformationen (1) und (3) — in dieser Reihenfolge — zu bezeichnen, und diese Ausdrucksweise hat man dann auch auf die Matrizen übertragen; man nennt die Matrix

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad (8)$$

das Produkt der beiden Matrizen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} . Man schreibt

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \mathfrak{A}, \quad (9)$$

wobei die Faktoren von rechts nach links zu lesen sind, damit die Reihenfolge der Faktoren mit der Reihenfolge der beiden Transformationen übereinstimmt: Man geht ja zuerst von den x_i zu den y_j und dann von diesen zu den z_k über. Man kann nun in der Symbolik der Matrizen noch ein Stück weitergehen. Die Veränderlichen x_i (und ebenso die y_j und z_k) bilden ja auch Matrizen, allerdings keine quadratischen, sondern solche, die aus einer Zeile und n Spalten (oder aus n Zeilen und einer Spalte) bestehen. Derartige einreihige Matrizen nennt man Vektoren. Schreibt man demgemäß den Vektor symbolisch mit einem kleinen gotischen Buchstaben

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

und erklärt das Produkt $\mathfrak{A} \mathfrak{x}$ des Vektors \mathfrak{x} mit der Matrix \mathfrak{A} durch die rechte Seite der Gl. (1), so nimmt die Transformation (1) das einfache Aussehen

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{A} \mathfrak{x} \quad (11)$$

an. Ebenso wird (3)

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{B} \mathfrak{y} \quad (12)$$

und daraus gewinnt man das Produkt der beiden Transformationen in der Form

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{B} (\mathfrak{A} \mathfrak{x}) = (\mathfrak{B} \mathfrak{A}) \mathfrak{x} = \mathfrak{C} \mathfrak{x} \quad (13)$$

(daß das assoziative Gesetz gilt, kann man leicht nachweisen). Zu lesen ist (13) natürlich wieder von rechts nach links, \mathfrak{x} ist die Ausgangsmatrix, darauf wird zuerst die Transformation \mathfrak{A} , dann die Transformation \mathfrak{B} angewendet, wodurch man zur Matrix \mathfrak{z} kommt. Das ist von bestechender Einfachheit und schaut gut und elegant aus. Aber eines muß man sich dabei doch ganz grundsätzlich und unter allen Umständen vor Augen halten, daß nämlich jedes solche symbolische Verfahren seine Existenzberechtigung einzig und allein aus seiner Zweckmäßigkeit und nicht aus einer scheinbaren Einfachheit und Eleganz allein schöpfen kann! Das scheint zwar ganz selbstverständlich, wird aber leider sehr

oft nicht genügend berücksichtigt. Sehen wir uns doch unser „Produkt“ etwas näher an! Durch dieses Nebeneinanderschreiben von gotischen Buchstaben ist doch überhaupt nichts über die Art der Verknüpfung ausgesagt, die erst durch die Gl. (1) und (6) erklärt wird. Die Frage ist die, ob dieser Nachteil, der sich vor allem bei numerischen Rechnungen auswirkt (eine Matrix mit numerisch gegebenen Elementen kann man doch nur mehr durch Anschreiben aller Elemente angeben!), wirklich durch den Vorteil der kurzen und eleganten Schreibweise mit den gotischen Buchstaben kompensiert wird. Die Gl. (1), (3), (5), (7) und (6) sind doch eigentlich schon recht einfach und sie haben den Vorteil, daß sie die Rechenvorschrift unmittelbar enthalten, also keines weiteren Kommentars bedürfen. Sind die Gl. (11), (12), (13) und (9) wirklich so viel einfacher, daß sich die Einführung von Symbolen überhaupt lohnt? Dazu kommt noch eines: Wir können die ersteren Gleichungen durch ein ganz simples Übereinkommen noch weiter vereinfachen. Beachten wir, daß die Summationsindizes — i in (1) und (7), j in (3) und (6), i und j in (5) — überall genau zweimal vorkommen, so können wir doch offenbar das Summationszeichen gänzlich weglassen, wenn wir übereinkommen, daß über jeden in einem Ausdruck zweimal vorkommenden Index automatisch von 1 bis n zu summieren ist. Die Gleichungen gehen dann über in

$$y_j = a_{ji} x_i, \quad (1')$$

$$z_k = b_{kj} y_j, \quad (3')$$

$$z_k = b_{kj} a_{ji} x_i, \quad (5')$$

$$b_{kj} a_{ji} = c_{ki}, \quad (6')$$

$$z_k = c_{ki} x_i. \quad (7')$$

Gewiß ist die Schreibweise dieser Gleichungen noch immer nicht so einfach wie die mit den gotischen Buchstaben, aber, wie schon erwähnt, ist sie unmittelbar und ohne weitere Erklärung verständlich und für die numerische Rechnung direkt zu verwerten. Ich persönlich glaube demgegenüber nicht an die Existenzberechtigung der Symbolik der gotischen Buchstaben.

Ich möchte hier noch eine Bemerkung anschließen, die mit dem Vorstehenden allerdings nur in einem losen Zusammenhang steht. Man hat sich in der modernen Algebra daran gewöhnt, alle Verknüpfungen, die dem distributiven Gesetz genügen, als Produkt zu bezeichnen. Gegen diese Gewohnheit läßt sich aber sowohl vom prinzipiellen wie auch vom praktischen und didaktischen Standpunkt einiges einwenden. In prinzipieller Hinsicht vor allem, daß dadurch die Multiplikation von der Existenz einer zweiten Verknüpfung, der Addition, abhängig wird, die aber oft gar nicht gegeben ist, wie z. B. in der Gruppentheorie. Vom praktischen Standpunkt ist festzustellen, daß der Techniker und Physiker zuerst und vor allem mit reellen und bestenfalls noch mit gewöhnlichen komplexen Zahlen rechnet. Die Multiplikation der komplexen Zahlen genügt aber stets dem kommutativen und assoziativen Gesetz. Dasselbe gilt von der Addition, von der sich im komplexen Bereich die Multiplikation vor allem dadurch unterscheidet, daß aus dem Verschwinden des Produktes das Verschwinden mindestens eines Faktors folgt. Aber diese, wie mir scheint, sehr wesentliche Eigenschaft geht ebenso wie die Gültigkeit des kommutativen und assoziativen Gesetzes bei den verallgemeinerten Produktbildungen der modernen Algebra in der Regel verloren: Aus dem Verschwinden des Produktes zweier Matrizen — eine Matrix ist bekanntlich dann und nur dann gleich Null, wenn alle Elemente Null sind — folgt beispielsweise durchaus nicht, daß mindestens einer der Faktoren die Nullmatrix ist. Es wäre mir lieber, wenn man für diese Verknüpfungen einen anderen Namen gefunden hätte, aber dagegen wird man heute wohl kaum mehr etwas machen können.

Was nun insbesondere das durch (6) definierte Matrizenprodukt betrifft, so habe ich oben schon festgestellt, daß diese Definition nur für Transformationsmatrizen

gilt. Es wäre ohne weiteres denkbar, daß man in einem anderen Zusammenhang auch zu einer ganz anderen Erklärung des Produktes zweier Matrizen kommt, z. B. in der Form: Das Produkt zweier gleichartiger (d. h. daß sie gleich viele Zeilen und Spalten enthalten) Matrizen ist eine Matrix, deren Elemente die Produkte der entsprechenden Elemente der beiden ursprünglichen Matrizen sind, für die also

$$c_{ik} = a_{ik} b_{ik}$$

an Stelle von (6) gilt. Bei der höchst allgemeinen Bedeutung des Matrixbegriffes ist es in sehr vielen Fällen aber einfach sinnlos, von einem Produkt zu sprechen oder ein solches einführen zu wollen. Wenn etwa zwei Systeme linearer Gleichungen mit n Unbekannten und numerisch gegebenen Koeffizienten vorliegen, so hat es wohl einen guten Sinn, sich über die Struktur der Lösungen Aufschluß zu verschaffen, indem man den Rang der Gleichungsmatrizen ermittelt. Aber welche Bedeutung sollte wohl ein irgendwie gebildetes Produkt der beiden Matrizen haben?

Geometrisch lassen sich die linearen Transformationen auf zwei verschiedene Arten deuten, die vom algebraischen Standpunkt gleichberechtigt, vom geometrischen aber ganz wesentlich verschieden sind, je nachdem man die x_i und y_j in (1) als die Koordinaten zweier im allgemeinen verschiedener Punkte in bezug auf ein und dasselbe kartesische (affine) Koordinatensystem auffaßt — Punkttransformation — oder als Koordinaten ein und desselben Punktes in bezug auf zwei im allgemeinen verschiedene kartesische (affine) Koordinatensysteme — Koordinatentransformation. In beiden Fällen wird wegen der geometrischen Eigenschaften — Erhaltung von Inzidenz und Parallelität — (1) als affine Transformation bezeichnet.

Die Gesamtheit aller affinen Transformationen bildet eine Gruppe, die affine Gruppe, deren Invariantentheorie die affine Geometrie ist. Ein wichtiger Sonderfall der allgemeinen linearen Transformation ist die orthogonale, bei der die Koeffizienten den Relationen

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad (15)$$

und als Folge davon

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk} \quad (16)$$

genügen. Das Koordinatensystem wird man zur geometrischen Deutung dann selbstverständlich auch orthogonal nehmen, also mit aufeinander senkrechten Achsen und gleichen Einheitsstrecken auf diesen. Die orthogonalen Transformationen bilden eine Untergruppe der affinen Gruppe, die als Bewegungsgruppe² bezeichnet wird, deren Invariantentheorie die euklidische Geometrie ist und die im Fall $n = 3$ mit der elementaren Geometrie des dreidimensionalen euklidischen Raumes übereinstimmt. Ihre fundamentalen Invarianten sind die Längen und Winkel.

Was ich bisher über die Matrizenrechnung und ihre Anwendung gesagt habe, gilt in viel höherem Maße auch von den Vektoren und Tensoren (oder Affinoren). Hier scheint mitunter jede Einsicht zu fehlen, was eigentlich ein Tensor ist und wann die Begriffsbildungen der Tensorrechnung mit Vorteil anzuwenden sind. So werden, um nur einige Beispiele zu nennen, in einem recht bekannten Lehrbuch der technischen Mechanik sechs Ausdrücke als Komponenten des Spannungstensors bezeichnet, die niemals ein Tensor sein können, und in einem an anderer Stelle erschienenen Aufsatz über kritische Drehzahlen einer mit Schwungmassen belasteten Welle wird in einer geradezu grotesken Weise mit den Begriffen der Tensorrechnung herumgeworfen, ohne daß auch nur die geringste Berechtigung dazu besteht. Der Verfasser behandelt

² Genauer „erweiterte“ Bewegungsgruppe, weil darin auch die Umlegungen (z. B. Spiegelungen) enthalten sind, die keine Bewegungen im strengen Sinn sind.

zuerst den „skalaren“ Fall mit nur einer Masse und geht dann zur „vektoriellen“ Darstellung über, indem er drei Massen auf der Welle annimmt und diese drei Massen als Komponenten eines Vektors bezeichnet. Ein besonders krasser Fall ist aber der eines amerikanischen Autors, der die Tensorrechnung geradezu mit Gewalt auf die Theorie der elektrischen Maschinen und Netze anwenden will, sich bis zu den Begriffen „absolutes Differential“ und „Krümmungstensor“ versteigt und darüber dicke Bücher und lange Serien von Abhandlungen veröffentlicht. Es hätte nicht viel Sinn, über solche Dinge auch nur ein Wort zu verlieren, wenn sie nicht geradezu symptomatisch wären, und wenn nicht die Gefahr bestünde, daß hier ein wertvolles und ungemein leistungsfähiges Instrument durch mißbräuchliche Anwendung in den Augen der Zuschauer verdorben und in Mißkredit gebracht wird. Daß ich hier keine Gespenster sehe, wird mir jeder bestätigen, der mit Technikern in den Forschungsabteilungen und Berechnungsbüros über die Sache gesprochen hat. „Die Vektoren“ — meist bleiben die Leute ja schon bei diesem Begriff stehen — „mögen ja etwas ganz Schönes sein, aber wirklich rechnen können wir doch nicht damit“, das ist fast die stereotype Antwort, und deutlicher kann man wohl nicht zum Ausdruck bringen, daß die Vektoren und erst recht die Tensoren in Mißkredit geraten sind, und das bei Leuten, die sie doch sehr gut brauchen und damit rechnen könnten, wenn sie nur wüßten wie.

Schuld an diesen bedauerlichen Zuständen ist eine recht merkwürdige Tatsache. Auf der einen Seite haben die Mathematiker in den letzten Jahrzehnten ein Rechenverfahren entwickelt, das in der Regel als „Tensoranalysis“ bezeichnet wird, ein Instrument von höchster Vollkommenheit ist und die großen Fortschritte auf dem Gebiete der allgemeinen Differentialgeometrie überhaupt erst ermöglicht hat. Diese Entwicklung ist von einem Impuls ausgegangen, den die Physik durch die Relativitätstheorie gegeben hat, aber die vierdimensionale Raum-Zeit-Welt der Relativitätstheorie mit ihrer allgemeinen Metrik ist nicht das, was vor allem die Techniker brauchen. Diese arbeiten nach wie vor im altehrwürdigen dreidimensionalen euklidischen Raum, wo mit all den schönen Worten und Namen der allgemeinen Methoden nicht viel anzufangen ist, wenn man nicht auf solchen Unfug verfallen will wie die oben genannten Autoren. Nun hat es aber durchaus den Anschein, als ob auch für den Techniker reichlich gesorgt wäre. Es gibt doch eine ganze Menge von Büchern, die sich recht bescheiden meist als „Lehrbuch der Vektorrechnung“ bezeichnen und in denen ein Rechenverfahren mehr oder weniger ausführlich dargelegt ist, dem der euklidische Raum zugrunde liegt. Die Methode, die hier ganz allgemein verwendet wird, ist aber im Prinzip völlig verschieden von den Methoden der allgemeinen Tensorrechnung. Ihre Vertreter reiten auf einem ganz absonderlichen Steckenpferd, das verschiedene Namen trägt, wie „Unabhängigkeit vom Koordinatensystem“, „Invariante Methode“, „Direkte Analyse“ usw. Gemeint ist damit folgendes: Da die Vektorrechnung ein geometrisches Rechenverfahren ist — daran ändern die zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten in der Physik nicht das geringste — und sich mit geometrischen Größen beschäftigt, will man mit diesen Größen selbst rechnen und alle fremden Elemente ausschalten. Diese fremden Elemente sind vor allem die Koordinaten, die hier auf einmal, ohne daß dafür irgendwo ein vernünftiger Grund angegeben wird, als etwas höchst Verabscheuungswürdiges hingestellt werden. Wir haben doch wohl alle genug analytische Geometrie getrieben, um zu wissen, wie zweckmäßig die Koordinaten sind und vor allem, wie gut es sich mit ihnen rechnen läßt. Daß die Formeln der analytischen Geometrie und die Längen und Winkel, die wir nach ihren Methoden berechnen, vom Koordinatensystem unabhängig sind, das wissen wir doch ganz genau. Es mag vielleicht zweckmäßig sein, sich über den Begriff der Unabhängigkeit vom Koordinatensystem eine präzisere Vorstellung zu schaffen, vielleicht lassen sich die Methoden der analytischen Geometrie auch noch weiter verbessern und verfeinern,

aber wir haben gar keinen Grund, sie in Bausch und Bogen zu verdammen und über Bord zu werfen, bloß weil es da Koordinaten gibt.

Diese sogenannte „Vektorrechnung“ erreicht ihre Unabhängigkeit vom Koordinatensystem dadurch, daß sie von Koordinaten einfach nicht redet. Für gewisse Größen und für gewisse zunächst am einfachsten erscheinende Verknüpfungen dieser Größen werden Symbole eingeführt und dann wird mit diesen Symbolen frisch darauf los gerechnet. Man macht also hier genau dasselbe wie bei den Matrizen, wenn man diese mit einem gotischen Buchstaben bezeichnet und das „Produkt“ von Transformationsmatrizen eben genau so wie ein gewöhnliches Produkt durch Nebeneinanderschreiben der Faktoren andeutet. Von Koordinaten ist nicht die Rede, allerdings nur scheinbar, denn irgendwie werden sie ja doch immer wieder eingeschmuggelt, nur hütet man sich, das Kind beim rechten Namen zu nennen. Man kann natürlich, darüber besteht kein Zweifel, die orientierte Strecke im Raum mit dem Symbol \mathbf{a} bezeichnen und „Vektor“ nennen. Hat man zwei solche Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} , so kann man sie in bekannter Weise addieren; das Resultat ist ein Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Man kann noch andere Verknüpfungen einführen, z. B. kann man $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = c$ das „innere Produkt von \mathbf{a} und \mathbf{b} “ nennen und durch $c = a \cdot b \cdot \cos \varphi$ definieren, wobei a und b die Längen von \mathbf{a} und \mathbf{b} und φ der von ihnen eingeschlossene Winkel ist. Für dieses innere Produkt von Vektoren gilt genau dasselbe wie für das Produkt von Matrizen, nur daß man hier schon beim Versuch, das assoziative Gesetz nachzuweisen, gründlich Schiffbruch erleidet, weil das innere Produkt eben kein Vektor, sondern eine Zahl ist: Das Bestehen einer Gleichung $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ hat zur Folge, daß die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{c} dieselbe Richtung haben. Und die Eigenschaft, daß ein Produkt nur dann verschwindet, wenn mindestens ein Faktor Null ist, trifft auch nicht zu, denn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ist wohl auch erfüllt, wenn $\mathbf{a} = 0$ oder $\mathbf{b} = 0$ ist, aber auch dann, wenn \mathbf{a} und \mathbf{b} aufeinander senkrecht stehen, und das ist sogar der allgemeine Fall. Aber sehen wir ein wenig weiter! Neben diesem inneren Produkt gibt es in der Vektorrechnung auch ein äußeres Produkt zweier Vektoren, das $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ oder $\mathbf{c} = [\mathbf{a} \mathbf{b}]$ geschrieben wird und einen Vektor \mathbf{c} bedeutet, der auf \mathbf{a} und \mathbf{b} senkrecht steht, nach einer bestimmten Vorschrift orientiert wird und dessen Länge c durch $c = a b \sin \varphi$ gegeben ist. Es erscheint sehr schön, wenn man so viele Worte in einem einfachen Zeichen zusammenfaßt. Aber wir bezweifeln, ob das ein Vorteil ist, denn man sieht doch diese vielen Worte dem Symbol gar nicht an. Man muß sich diese ganze Definition auswendig merken und so fest ins Gedächtnis einprägen, daß sie immer ganz automatisch ins Bewußtsein tritt, wenn wir zwei gotische Buchstaben in einer eckigen Klammer oder durch ein schräges Kreuz verbunden sehen. Und von den genannten Eigenschaften des Produktes zweier Zahlen ist hier gar keine mehr übrig geblieben, es ist $[\mathbf{a} \mathbf{b}] \neq [\mathbf{b} \mathbf{a}]$, wenn nicht $[\mathbf{a} \mathbf{b}] = 0$ ist, es ist $[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})] \neq [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}]$ und es ist $[\mathbf{a} \mathbf{b}] = 0$ nicht nur, wenn $\mathbf{a} = 0$ oder $\mathbf{b} = 0$ ist, sondern auch, wenn \mathbf{a} und \mathbf{b} parallel sind!

Solange man von der Vektorrechnung nichts anderes braucht als Skalare, Vektoren und das innere und äußere Produkt von Vektoren, solange geht die Sache noch ganz gut und man kann von einer Art geometrischer Stenographie reden, weil man viele geometrische und auch physikalische Beziehungen in einfacher und recht anschaulicher Weise — wegen der anschaulichen Bedeutung der Vektoren — anschreiben kann. Aber man braucht doch mehr als nur diese. Vor allem braucht man doch auch die Punkte des Raumes! Aber Vektoren lassen sich nicht verwenden, um Punkte festzulegen. Denn die Vektoren schwimmen frei im Raum herum, sie behalten nur immer ihre Länge, Richtung und Orientierung bei. Wenn wir Punkte festlegen wollen, müssen wir einmal einen festen Punkt O im Raum wählen, dann können wir die übrigen Punkte des Raumes durch „Ortsvektoren“ mit dem Anfangspunkt O festlegen. Aber diese Ortsvektoren sind schon keine richtigen Vektoren mehr, eben wegen des festen Anfangs-

punktes; denn den Anfangspunkt eines ordentlichen Vektors können wir ganz beliebig im Raume wählen. Aber wir brauchen noch etwas, wenn wir mit diesen Dingen rechnen wollen. Wir müssen doch auch imstande sein, spezielle Vektoren im Raum anzugeben. Das können wir z. B. machen durch Angabe der Länge und der Winkel, die der Vektor mit zwei festen Richtungen einschließt, oder besser durch die Angabe der Längen der Projektionen des Vektors auf drei Richtungen im Raum, die nicht alle zu einer Ebene parallel sind. Wir brauchen also außer dem Punkt O noch drei feste Gerade (Richtungen), die wir zweckmäßigerweise so wählen, daß sie zu je zweien aufeinander senkrecht stehen und durch O gehen. Wir müssen, um die Längen der Projektionen unseres Vektors messen zu können, auf den Geraden auch noch Einheitsstrecken festlegen. Wir werden diese Einheitsstrecken der Einfachheit halber untereinander gleich wählen. Da haben wir also einen Punkt O , durch diesen Punkt drei aufeinander senkrechte orientierte Gerade und auf ihnen gleiche Einheitsstrecken. Wir haben den Eindruck, daß man so etwas bisher immer als kartesisches Koordinatensystem bezeichnet hat. Jetzt können wir den Vektor numerisch durch die Längen seiner Projektionen auf die Achsen festlegen. Wir sehen: Ein Vektor α ist also völlig identisch mit einem geordneten³ System von drei Zahlen (A_1, A_2, A_3) , seinen Koordinaten. Es ist klar, daß eine orientierte Strecke (Vektor) im Raum, wenn wir uns den Raum samt allen seinen Punkten festgehalten denken, vom Koordinatensystem unabhängig ist, womit doch nichts anderes gemeint ist, als daß der Vektor derselbe bleibt, auch wenn wir mit irgendeinem Koordinatensystem im Raum herumfahren. Das Symbol α können wir also als unabhängig vom Koordinatensystem ansehen. Aber die drei Koordinaten A_i des Vektors sind es natürlich nicht. Denn wenn wir einen anderen Punkt \bar{O} statt O wählen und drei andere untereinander senkrechte Gerade durch \bar{O} , so werden die Längen der Projektionen von α auf die drei neuen Geraden andere Werte haben als früher. Aber wenn wir das neue Koordinatensystem mit dem Ursprung \bar{O} in bezug auf das alte System mit dem Ursprung O irgendwie festlegen, z. B. durch Gleichungen, die uns angeben, wie sich die Koordinaten eines allgemein gewählten Punktes im neuen System aus den Koordinaten desselben Punktes im alten System berechnen, dann werden wir ohne weiteres auch angeben können, wie sich die Koordinaten eines Vektors bei dieser Änderung des Koordinatensystems verhalten. Auf diese Art kommt man doch in einem viel präziseren, fast möchten wir sagen, höheren Sinn zu dem Begriff der Unabhängigkeit vom Koordinatensystem, indem wir die Gesamtheit aller (rechtwinkliger kartesischer) Koordinatensysteme betrachten und das Verhalten der Vektorkoordinaten beim Übergang von einem zum anderen System beherrschen und nicht, indem wir einen Vektor durch ein Symbol bezeichnen und dann so tun wie der bekannte Vogel Strauß, als gebe es kein Koordinatensystem und käme man gänzlich ohne ein solches aus.

Aber auch die Vektorrechnung bleibt nicht bei den Vektoren stehen: Die geometrischen und physikalischen Probleme führen ganz zwangsläufig zur Betrachtung von Größen höherer Art, den Tensoren oder Affinoren. Die symbolische Methode hat bei ihrer Einführung große Schwierigkeiten zu überwinden, weil hier ein geometrisches Substrat von ähnlicher Anschaulichkeit, wie es die orientierte Strecke bei den Vektoren ist, völlig fehlt. Den bequemsten Zugang zu den Tensoren zweiter

³ D. h., daß die Reihenfolge festgelegt ist, denn natürlich ist $(1, 1, 2)$ ein anderer Vektor als $(1, 2, 1)$. Wir nennen diese drei Zahlen nicht, wie es oft geschieht, Komponenten, sondern mit einem guten Grund Koordinaten des Vektors. Das Wort Komponenten hätte sonst einen doppelten Sinn, da man in der Mechanik gewohnt ist, unter Komponenten einer Kraft stets wieder Kräfte zu verstehen, deren Summe die ursprüngliche Kraft ist: Demnach sind die Komponenten eines Vektors selbst Vektoren und nicht Zahlen, und bei dieser Bedeutung des Wortes Komponente wollen wir auch bleiben.

Stufe, um mit dem einfachsten Falle zu beginnen (sie werden auch als Dyaden bezeichnet), bildet auf jeden Fall eine Zuordnung zwischen Vektoren, die besondere Eigenschaften besitzt, deren mathematischer Ausdruck eben der Tensor ist. Wir werden auf diese Eigenschaften weiter unten noch zurückkommen; hier stellen wir zunächst einmal fest, daß eine solche Zuordnung zwischen zwei Vektoren \mathfrak{x} und \mathfrak{y} symbolisch in der Form $\mathfrak{y} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}$ geschrieben wird, wobei durch den Punkt eine neue Art „inneres Produkt“ zwischen Tensor \mathfrak{A} und Vektor \mathfrak{x} angedeutet ist, dessen Resultat eben der Vektor \mathfrak{y} ist, der dem Vektor \mathfrak{x} auf diese Art eindeutig zugeordnet wird. Für dieses innere Produkt gilt auch das kommutative Gesetz nicht, da im allgemeinen $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} \neq \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{A}$ ist, so daß es hier zwei verschiedene Arten von inneren Produkten von Tensoren zweiter Stufe und Vektoren gibt. Bei Tensoren dritter Stufe gibt es drei verschiedene Möglichkeiten, ein inneres Produkt mit einem Vektor zu bilden, wobei das Resultat jedesmal ein Tensor zweiter Stufe ist. Aber es gibt nur einen vernünftigen Weg — den die symbolische Schreibweise allerdings nicht gegangen ist —, diese verschiedenen Möglichkeiten halbwegs prägnant zu charakterisieren, und das ist der, die Stufe eines Tensors durch eine entsprechende Anzahl irgendwelcher Zeichen anzugeben, also etwa $\mathfrak{A}_{\text{O}\times}$ für einen Tensor zweiter Stufe und $\mathfrak{A}_{\text{O}\times\Box}$ für einen Tensor dritter Stufe zu schreiben. Wenn man dann bei dem Vektor, der ja nichts anderes als ein Tensor erster Stufe ist, ebenfalls ein Zeichen anbringt, so lassen sich die drei Arten innerer Produkte bei einem Tensor dritter Stufe etwa in der Form $\mathfrak{A}_{\text{O}\times\Box} \mathfrak{C}_{\text{O}}$, $\mathfrak{A}_{\text{O}\times\Box} \mathfrak{C}_{\times}$, $\mathfrak{A}_{\text{O}\times\Box} \mathfrak{C}_{\Box}$ schreiben und unterscheiden. Man kann dann, da die Phantasie kaum ausreicht, um in allen Fällen die nötige Zahl von Verknüpfungszeichen zu erfinden, statt dieser Zeichen O , \times , \Box Buchstaben verwenden, also normale und vernünftige Indizes schreiben: \mathfrak{A}_{ij} für den Tensor zweiter Stufe, \mathfrak{A}_{ijk} für den Tensor dritter Stufe usw.; und man wird die Vektoren dann auch immer mit einem Index versehen, wodurch man sich auch von der lästigen Notwendigkeit befreit, Vektoren mit kleinen und Tensoren mit großen Buchstaben zu bezeichnen. Aber wenn man soweit gelangt ist, dann ist formal nur mehr ein ganz kleiner Schritt zu der Schreibweise zu machen, die in der allgemeinen Tensorrechnung seit jeher üblich ist. Es hat keinen Sinn mehr, noch gotische Buchstaben zu verwenden. Die lateinischen erfüllen jetzt den Zweck genau so gut, da die Art der Größe durch die Zahl der Indizes gegeben ist.

Aber jetzt besteht die Möglichkeit, die Symbole

$$A_i, A_{ij}, A_{ijk} \quad (17)$$

usw. auch anders zu deuten, nicht mehr symbolisch, sondern konkret als Koordinaten der Tensoren in einem bestimmten Koordinatensystem, wobei die allgemeinen Indizes als Repräsentanten der Zahlen 1, 2, 3 anzusehen sind. Innere Produkte sind dann Summen der Form

$$\sum_i A_i X_i, \sum_i A_{ij} X_i \text{ oder } \sum_j A_{ij} X_j, \\ \sum_i A_{ijk} X_i \text{ oder } \sum_j A_{ijk} X_j \text{ oder } \sum_k A_{ijk} X_k \text{ usw.}$$

Man sieht: Der Summationsindex ist in allen Fällen zweimal vorhanden, und wenn man das oben beim Matrizenprodukt angeführte Summationsübereinkommen mit $n = 3$ auch hier gelten läßt, so nehmen die obigen inneren Produkte das recht einfache Aussehen an:

$$A_i X_i, A_{ij} \bar{X}_i, A_{ij} X_j, A_{ijk} X_i, A_{ijk} X_j, A_{ijk} X_k. \quad (18)$$

Die Zweckmäßigkeit dieses Summationsübereinkommens ist durch die Praxis des Rechnens in jeder Hinsicht erwiesen. Die besonderen Eigenschaften der durch Tensoren vermittelten Zuordnung von Vektoren (oder Tensoren), von denen wir oben gesprochen haben, drücken sich in dieser Schreibweise klar und deutlich darin aus, daß alle Ausdrücke (18) in den Koordinaten des Vektors X_i linear und homogen

sind. Wir haben aber noch etwas anderes erreicht: Die Koordinaten von Tensoren sind gewöhnliche Zahlen und die Rechenoperationen, die in den Ausdrücken (18) mit diesen Zahlen auszuführen sind, sind die gewöhnliche Addition und Multiplikation, wie sie in der elementaren Arithmetik gelehrt werden. Denn $A_i X_i$ ist nichts anderes als $A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3$. Wenn wir das Summationsübereinkommen akzeptieren, so ist durch die Schreibweise $A_i X_i$ des inneren Produktes der beiden Vektoren A_i und X_i auch schon ganz genau und eindeutig gesagt, wie dieser Skalar aus den Koordinaten der beiden Vektoren zu berechnen ist. Darin liegt nicht mehr Symbolik, als wir es in anderen Gebieten der Mathematik gewohnt sind.

Wir haben schon erwähnt, daß die Schreibweise (17) für Tensoren — im wesentlichen — identisch ist mit der in der allgemeinen Tensorrechnung verwendeten; die Unterschiede sind nur dadurch bedingt, daß wir hier den euklidischen Raum zugrunde legen und daher einige Vereinfachungen vornehmen können. Die formale Methode, die sich aus dieser Spezialisierung ergibt und die wir hier für das innere Produkt kurz skizziert haben, ist eben nichts anderes als die Anpassung der allgemeinen Methoden auf den besonderen Fall des dreidimensionalen euklidischen Raumes.⁴ Wohlgemerkt: Die formale Methode ist anders als die gebräuchliche Symbolik, aber der sachliche Inhalt ist genau derselbe. Es bleibt bei der anschaulichen Deutung des Vektors als orientierte Strecke im Raum, aber der Vektor wird nicht durch ein Symbol a dargestellt, sondern durch seine drei Koordinaten. Wir sagen: Ein Vektor A_i ist ein System von drei Zahlen (A_1, A_2, A_3), die im einzelnen seine Koordinaten heißen und sich bei einer Änderung des Koordinatensystems in einer ganz bestimmten Weise transformieren. Dieses Transformationsgesetz, das sich aus der geometrischen Deutung des Vektors als orientierte Strecke ergibt, ist wesentlich. Man kann nicht ohne weiteres drei Zahlen als Koordinaten eines Vektors ansehen, sondern nur dann, wenn wir wissen, daß sie sich bei einer Änderung des Koordinatensystems dem Gesetz entsprechend transformieren. Entsprechendes gilt für Tensoren.

Häufig deutet man physikalische Zusammenhänge geometrisch, aber auch wenn man dann geometrische Begriffe verwendet, von Kurven, Geraden, Längen und Winkeln redet, so treibt man deshalb noch keine Geometrie. Man wird in solchen Fällen mitunter auch die Methoden der Tensorrechnung mit Vorteil verwenden können, ohne daß man es aber dann wirklich mit Tensoren zu tun hat. Wenn auf einer Welle drei Schwungmassen sitzen, so kann uns nichts hindern, diese Massen mit M_i zu bezeichnen. Aber es ist einfach falsch zu sagen, daß diese drei Zahlen M_i die Koordinaten eines Vektors sind, und vor allem, man hat nichts davon. Wenn ein Strom I durch einen Widerstand R fließt, so ist die Leistung $N = R I^2$. Deutet man I und N als Koordinaten in einem rechtwinkligen ebenen Koordinatensystem, so ist der funktionale Zusammenhang zwischen I und N bei konstantem R durch eine Parabel dargestellt, aber es ist noch keinem Menschen eingefallen, deshalb zu sagen, daß diese Leistung eine Parabel ist. Daß man hier nicht Geometrie treibt, erkennt man am deutlichsten daran, daß die Koordinaten N und I selbst eine physikalische Bedeutung haben, also Skalare sind und daß daher eine Koordinatentransformation völlig sinnlos ist, weil sie die physikalische Bedeutung der Koordinaten, auf die es gerade ankommt, zerstören würde. Wenn es aber keine Koordinatentransformation gibt, dann sind wir auch nicht in der Lage festzustellen, ob irgendein Ding ein Vektor ist oder nicht, weil wir das Verhalten der Koordinaten dieses Dinges bei einer Koordinatentransformation nicht nachprüfen können. Die großen formalen Schwierigkeiten der symbolischen Methode sind meines Erachtens die alleinige Ursache, weshalb sich die

⁴ Daß diese Anpassung ein durchaus brauchbares Rechenverfahren für den euklidischen Raum ergibt, darauf habe ich schon vor Jahren hingewiesen: A. Duschek: Über symbolfreie Vektorrechnung. Jber. dtsch. Math.-Ver. 39 (1930).

Tensorrechnung bisher in den Anwendungen so wenig hat durchsetzen können. Zweifellos lassen sich die einfachsten Verknüpfungen, das innere und äußere Produkt von Vektoren, symbolisch viel einfacher anschreiben wie in Koordinaten. Zweifellos erfordert auch das Rechnen mit den Indizes eine gewisse Übung und Vertrautheit, aber wir glauben, daß man sich diese Übung und Vertrautheit leicht aneignet, viel leichter jedenfalls als die Vertrautheit mit den verwickelten und nichtssagenden Symbolen der angeblich koordinatenfreien „direkten“ Methode. Der ganze Rechenapparat der hier in ihren Grundgedanken skizzierten „analytischen Methode“ der Tensorrechnung läßt sich auf die folgenden vier grundlegenden Punkte zurückführen, nämlich:

1. Das Summationsübereinkommen, wonach über jeden Index, der in einem Glied zweimal vorkommt, automatisch von 1 bis 3 zu summieren ist.

2. Der „ δ -Tensor“ δ_{ij} , ein Tensor zweiter Stufe, der mit dem in der Mathematik als das „Kroneckersche δ “ bezeichneten System von neun Zahlen identisch ist und dessen Koordinaten den Wert 1 oder 0 haben, je nachdem die Indizes gleich oder verschieden sind.

3. Der „ ε -Tensor“ ε_{ijk} , also ein Tensor dritter Stufe, dessen Koordinaten bei entsprechender Orientierung des Koordinatensystems die Werte $+1$ oder -1 haben, wenn ijk eine gerade oder ungerade Permutation der Zahlen 1, 2, 3 ist, während alle Koordinaten mit mindestens zwei gleichen Indizes verschwinden.

4. Die Tatsache, daß das Differentiationszeichen $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sich wie ein Vektor verhält, d. h. daß $\frac{\partial A_{ijk} \dots}{\partial x_h}$ ein Tensor $(m+1)$ -ter Stufe ist, wenn $A_{ijk} \dots$ ein Tensor m -ter Stufe ist. Es ist mit dem „symbolischen Vektor ∇ (Nabla)“ der symbolischen Methode identisch.

Während man das innere Produkt von zwei Vektoren A_i und B_i mit Hilfe des δ -Tensors in der Form $\delta_{ij} A_i B_j$ schreiben kann, ist das äußere Produkt mit Hilfe des ε -Tensors durch $\varepsilon_{ijk} A_i B_j$ gegeben. Das sieht auf den ersten Blick einigermäßen schwerfällig aus, besonders im Vergleich zu dem einfachen Symbol $[a \ b]$. Aber wenn man sich ein wenig mit den Indizes vertraut gemacht hat, so wird man die großen Vorteile der scheinbar so schwerfälligen Schreibweise bald erkennen. Dazu kommt — und das ist das Entscheidende —, daß man allgemein eine Zuordnung, bei der zwei gegebenen Vektoren ein dritter entspricht, gar nicht anders schreiben kann als mit Hilfe eines Tensors dritter Stufe in der Form $Z_i = A_{ijk} X_j Y_k$. Ich möchte in diesem Zusammenhang auch noch darauf hinweisen, daß alle Formeln (nicht die Definitionen) der Tensorrechnung sich in einer viel allgemeineren Form wie unter Benützung der symbolischen Methode als Relationen zwischen dem Vektor $\frac{\partial}{\partial x_i}$ und den beiden Tensoren δ_{ij} und ε_{ijk} schreiben lassen. So tritt an Stelle des sogenannten Entwicklungssatzes der symbolischen Methode hier die Formel

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ihl} = \delta_{jh} \delta_{kl} - \delta_{kh} \delta_{jl}. \quad (19)$$

Gegenüber der symbolischen Form

$$[[a \ b]c] = (ac) \ b - (bc) \ a$$

ist (19) nur mehr eine Art Gerippe, da keine speziellen Vektoren in (19) eingehen. Die Theorie der Felder, die sogenannte „Vektoranalysis“, wird durch den obigen Punkt 4 beherrscht, ja fast erschöpft. Was durch die Symbole grad, div und rot, die wieder gar nichts über ihre Bedeutung aussagen, bezeichnet wird, bekommt hier die Form

$$\frac{\partial A}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial A_i}{\partial x_j}, \quad \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_i}. \quad (20)$$

Der erste Ausdruck ist der Gradient des Skalars A , der zweite die Divergenz und der dritte der Rotor des Vektors A_i ; wie diese Größen aus A bzw. A_i zu berechnen sind, ist durch die Ausdrücke (20) ganz eindeutig und in einer ohne weiteres verständlichen Weise angegeben.

Bemerkt sei zum Schluß noch, daß jeder Tensor zweiter Stufe eine Matrix ist. Die Umkehrung gilt aber nicht, nicht jede quadratische Matrix ist ein Tensor zweiter Stufe. Das ist nur dann der Fall, wenn es erstens überhaupt einen Sinn hat, von einer durch eine bestimmte Koordinatentransformation „induzierten“ Transformation der Elemente der Matrix zu sprechen und wenn zweitens diese Transformation der Elemente der Matrix in einer ganz bestimmten Weise erfolgt. So ist die Matrix einer linearen Transformation ein Tensor zweiter Stufe, wenn wir die Transformation als Punkttransformation deuten, während die Matrix einer linearen Koordinatentransformation kein Tensor ist. Tensoren höherer Stufe haben mit Matrizen überhaupt nichts mehr zu tun, wenn man nicht den Matrixbegriff weiter verallgemeinert, wie das wohl gelegentlich schon geschehen ist (drei- und mehrdimensionale Matrizen, entsprechend der Stufenzahl des betrachteten Tensors).

Ich habe hier gegen zwei Dinge polemisiert, gegen die falsche Verwendung der Begriffe Matrix, Vektor und Tensor und gegen die in der Matrizen- und Tensorrechnung gebräuchliche Symbolik der gotischen Buchstaben. Was den ersten Punkt anbelangt, so weiß ich mit voller Sicherheit, daß ich im Recht bin. Aber meine Polemik gegen die Symbolik entspricht, wie ich gerne zugebe, einer subjektiven Überzeugung. Ich bin daher auch auf lebhaften Widerspruch gefaßt, aber auf der anderen Seite habe ich die Genugtuung, daß die von mir propagierte „analytische Methode“ von einigen unvoreingenommenen Praktikern mit dem Ausdruck sichtlicher Erleichterung und Vergnügens akzeptiert wurde.

(Eingegangen am 30. September 1946.)

Freie erzwungene gedämpfte Schwingungen mit nicht linearer Kennlinie eines Systems mit einem Freiheitsgrad.

Von Fritz Söchting, Wien:

Mit 4 Textabbildungen.

Ist die Federkennlinie, das ist die Linie, welche die Abhängigkeit der Federkraft von dem Schwingungsausschlag angibt, keine gerade Linie, so werden vielfach die Untersuchungen unter der Voraussetzung durchgeführt, daß die Schwingungsausschläge klein sind. Bei dieser Annahme erfolgt eine Linearisierung der Differentialgleichung und die Lösung ist auf einfachem Wege zu finden. Ist nur ein Freiheitsgrad vorhanden, so lautet die Differentialgleichung für die Bewegung

$$m \ddot{x} + f(x) + g(\dot{x}) = P(t).$$

In dieser Gleichung bedeutet x den Schwingungsausschlag (dieser kann entweder durch eine Länge oder durch einen Winkel gemessen werden, dann bedeutet m die Masse oder das entsprechende Trägheitsmoment), die Punkte über x die Zahl der Differentiationen nach der Zeit, $f(x)$ die Rückstellkraft bei elastischer Kopplung, die elastische Kraft, $g(\dot{x})$ die Dämpfungskraft und $P(t)$ die erregende Kraft.

Die Rückstellkraft ist in Abhängigkeit von dem Ausschlag gegeben. Ist die Federkennlinie eine Gerade, die durch den Nullpunkt hindurchgeht, $f(x) = cx$ und hat die Dämpfungs- und die erregende Kraft die Größe Null, so erhält man die freie Schwingung mit gerader Kennlinie und für die Bewegung eine harmonische Schwingung. Bei Vorhandensein von nicht gerader Kennlinie betrachtet man vielfach — wie schon hervorgehoben — nur die kleinen Schwingungen, für diese ist genähert $f(x)$ durch cx

ersetzbar und man erhält auf diese Weise wieder eine harmonische Schwingung. Exakte Lösungen für die freie Schwingung sind u. a. für $f(x) = \sin x^1$ und für $f(x) = c x - c_1 x^2 - c_2 x^3$ bekannt, sie führen auf elliptische Funktionen. In vielen Fällen läßt sich die Integration der Differentialgleichung ohne Vernachlässigungen nicht durchführen und man muß graphische oder rechnerische Näherungsverfahren³ anwenden. So ersetzt Geiger⁴ die gekrümmte Kennlinie durch mehrere geradlinige Stücke und gibt auch ein graphisches Verfahren zur Ermittlung der Eigenschwingungsdauer an. Timoshenko⁵ berechnet sich mit Hilfe des Arbeitssatzes

$$A = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2$$

die zur Verschiebung x gehörige Geschwindigkeit, dann kann man rechnerisch oder graphisch⁶ aus der Gleichung

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\dot{x}}$$

die Abhängigkeit des Weges von der Zeit ermitteln. Um diese Integration durchzuführen, kann man auch mit Klotter⁷ die Simpsonsche Regel anwenden. Rayleigh⁸ nimmt als erste Näherung eine harmonische Bewegung an und findet durch Iteration verbesserte Näherungslösungen der Differentialgleichungen.

1. Näherungsmethode zur Berechnung der Schwingungsdauer der freien Schwingung.

Ist die Differentialgleichung der Bewegung

$$m \ddot{x} = -f(x)$$

gegeben, so läßt sich sofort das erste Integral angeben

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 = - \int_{x_0}^x f(x) dx. \quad (1)$$

Die rechte Seite der Gl. (1) wird sich wohl in den meisten Fällen sofort bestimmen lassen. Wäre die rechte Seite der Gl. (1) unbekannt, so ist die Kenntnis von

$$\dot{x} = \dot{x}(t)$$

erforderlich, um die linke Seite der Gl. (1) zu berechnen. Nimmt man an, daß die Zeit-Weg-Kurve nur wenig von einer Sinuslinie verschieden ist, so ist

$$x = C \sin \omega t, \quad \dot{x} = \omega C \cos \omega t. \quad (2)$$

Wählt man als Integrationsgrenzen der Gl. (1) die Werte $x = 0$ und $x = C$ bzw. $t = 0$ und $\omega t = \frac{\pi}{2}$, so erhält man, wenn man Gl. (2) in die Gl. (1) einsetzt,

$$\frac{1}{2} m C^2 \omega^2 = \int_0^C f(x) dx$$

und damit eine Gleichung für die mittlere Eigenfrequenz

$$\omega^2 = \frac{2}{C^2 m} \int_0^C f(x) dx \quad (3)$$

bzw. für die Schwingungsdauer

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

¹ F. Auerbach, Pendel, Aerbach-Hort: Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. II, S. 616. Leipzig. 1930.

² G. Duffing: Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung, S. 23. Braunschweig. 1918.

³ H. v. Sanden: Praktische Analysis, S. 162. Berlin. 1923. — C. Runge, H. König: Vorlesungen über numerisches Rechnen, S. 286. Berlin. 1924.

⁴ J. Geiger: Mechanische Schwingungen, S. 25. Berlin. 1927.

⁵ S. Timoshenko: Schwingungsprobleme der Technik, S. 89. Berlin. 1932.

⁶ E. Lehr: Schwingungstechnik, Bd. II, S. 339. Berlin. 1934.

⁷ K. Klotter: Über die freien Bewegungen einfacher Schwinger mit nicht gerader Kennlinie. Ingenieur-Arch. 7, 87 (1936).

⁸ Rayleigh: Die Theorie des Schalles, Bd. I, S. 89. Braunschweig. 1879.

- a) Die Federkennlinie besteht aus zwei Geraden mit verschiedener Neigung.

Sind c_1 und c_2 die Tangenten der Neigungswinkeln im Federkraft-Weg-Diagramm, vgl. Abb. 1a, und ist x_2 der größte auftretende Schwingungsausschlag und ist x_1 der-

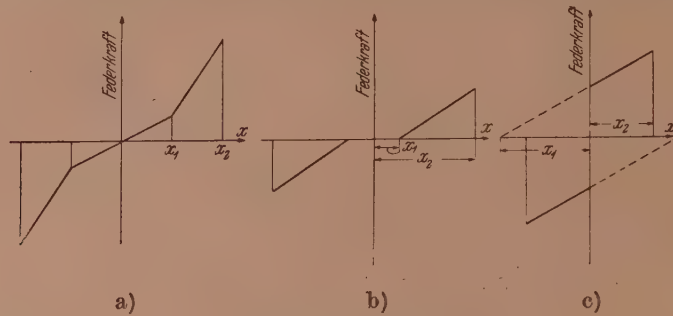


Abb. 1. Federkennlinien.

jenige an der Unstetigkeitsstelle des Diagramms, so gilt für $x_2 > x > x_1$ die Differentialgleichung

$$m \ddot{x} + c_2 x + (c_1 - c_2) x_1 = 0.$$

Sind bei $t_0 = 0$ der Ausschlag x_2 und die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}_2 = 0$ gegeben, so erhält man als Lösung die Gleichung

$$x = \left(x_2 + \frac{c_1 - c_2}{c_2} x_1 \right) \cos \sqrt{\frac{c_2}{m}} t - \frac{c_1 - c_2}{c_2} x_1.$$

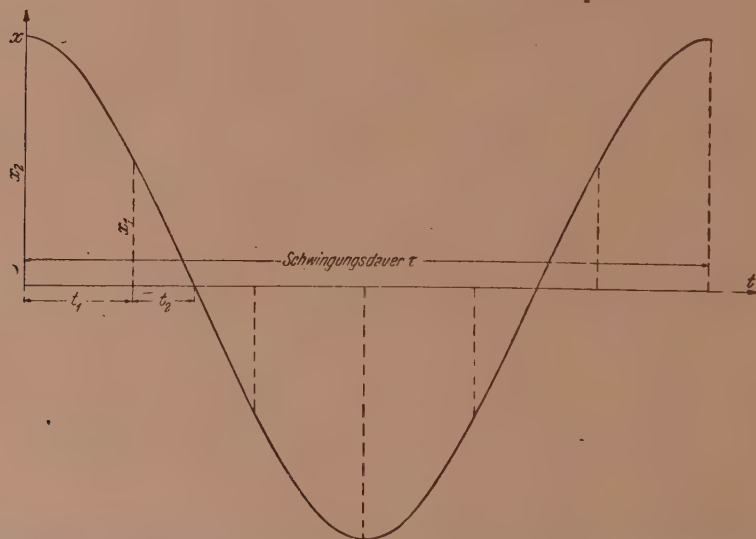


Abb. 2. Zeit-Weg-Diagramm für eine Schwingung mit einer Federkennlinie nach Abb. 1a und $x_2 = 2 x_1$ und $c_2 = 3 c_1$.

Die Zeit t_1 , welche verstreicht, bis der Ausschlag die Größe x_1 annimmt, bestimmt sich aus der Gleichung

$$\frac{c_1}{c_2} x_1 = \left(x_2 + \frac{c_1 - c_2}{c_2} x_1 \right) \cos \sqrt{\frac{c_2}{m}} t_1$$

und die zugehörige Geschwindigkeit

$$\dot{x}_1 = - \left(x_2 + \frac{c_1 - c_2}{c_2} x_1 \right) \cdot \sqrt{\frac{c_2}{m}} \sin \sqrt{\frac{c_2}{m}} t_1.$$

Mit diesen Werten x_1 und \dot{x}_1 als Anfangswerte hat man für den nächsten Teil der Schwingungsbewegung, für welche die Gleichung

$$x = C \sin \left(\sqrt{\frac{c_1}{m}} t + \vartheta \right)$$

gilt, die Konstanten zu bestimmen. Kennt man diese, so ist es einfach, die Zeit t_2 zu bestimmen, welche verstreicht, bis die Masse m durch den Nullpunkt hindurchgeht, dann ist die gesamte Schwingungsdauer

$$\tau = 4 (t_1 + t_2).$$

Wenn es auch nicht schwierig ist, diese Rechnungen durchzuführen, Abb. 2 gibt das Zeit-Weg-Diagramm für $x_2 = 2 x_1$ und $c_2 = 3 c_1$, so ist es einfacher, Gl. (3) anzuwenden. Wie man aus Abb. 2 ersieht, weicht das Zeit-Weg-Diagramm nur wenig von einer Kosinuslinie ab, so daß

$$x = x_2 \cos \omega t$$

als Näherungslösung anzusetzen ist. x_2 bedeutet den Größtausschlag. Durch Anwendung des Arbeitssatzes erhält man sofort eine Bestimmungsgleichung für die Kreisfrequenz

$$\frac{1}{2} m x_2^2 \omega^2 = \frac{1}{2} c_2 (x_2 - x_1)^2 + c_1 x_1 x_2 - \frac{1}{2} c_1 x_1^2$$

und damit

$$\omega = \sqrt{\frac{c_2}{m} \left[\left(1 - \frac{x_1}{x_2} \right)^2 + 2 \frac{c_1}{c_2} \frac{x_1}{x_2} - \frac{c_1}{c_2} \frac{x_1^2}{x_2^2} \right]} \quad (4)$$

bzw. die Schwingungsdauer $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$.

Um zu sehen, welche Fehler bei dieser Vereinfachung gemacht werden, wurde angenommen, daß $x_2 = 2 x_1$ und $c_2 = 3 c_1$ sei. Dann bestimmt sich nach der genauen Methode die Schwingungsdauer zu $\tau = 8.2659 \sqrt{\frac{m}{c_2}}$ und nach der genäherten $\tau = 8.8857 \sqrt{\frac{m}{c_2}}$. Daher ist der bei dieser Vereinfachung gemachte Fehler 7.49%.

b) Schwingung mit Spiel.

Bei dieser Schwingungsart ist die Strecke von 0 bis x_1 federkraftfrei, das Federkraft-Weg-Diagramm ist in Abb. 1b dargestellt, c_1 hat daher die Größe Null. Diese Art der Schwingungen bezeichnet man auch als Schüttelschwingungen.⁹ Die genaue Lösung ist auch schon oben gegeben worden, man braucht nur für c_1 den Wert Null in die Gleichungen einzusetzen, dann erhält man sofort die Lösung für diese Art der Aufgabenstellung, nur hat man zu beachten, daß die federkraftfreie Strecke von 0 bis x_1 mit der konstanten Geschwindigkeit \dot{x}_1 durchflogen wird. Setzt man in Gl. (4) für c_1 den Wert Null ein, so erhält man sofort die folgende Näherungslösung für die mittlere Eigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{c_2}{m} \left(1 - \frac{x_1}{x_2} \right)^2}$$

und damit auch die Zeit für eine volle Schwingung.

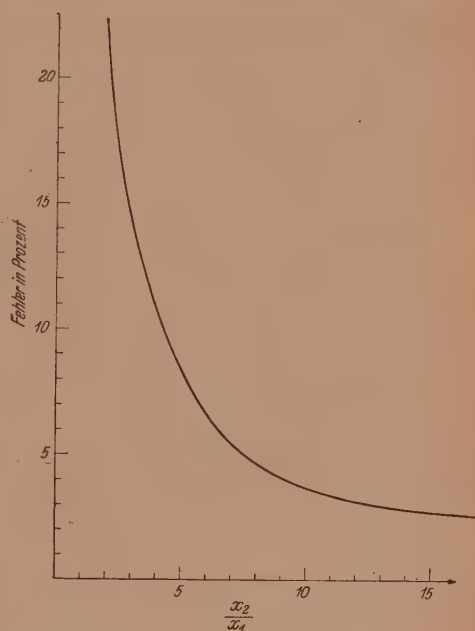


Abb. 2. Fehler bei Berechnung der Schwingungsdauer der Schüttelschwingungen.

⁹ A. Wichert: Theorie der Schüttelschwingungen. Forsch. Gebiete Ingenieurwes., H. 266 (1924).

Der Fehler, welchen man bei dieser Art von Näherung bei der Berechnung der Schwingungsdauer machen wird, hängt ab von dem Verhältnis $\frac{x_2}{x_1}$. Es ist einzusehen, daß bei $x_1 = x_2$, also bei $\frac{x_2}{x_1} = 1$, der Fehler unendlich groß werden wird, denn die Schwingungsdauer, welche man durch die Näherungsrechnung erhält, hat die Größe Unendlich, daher der gemachte Fehler. Bei kleinem Verhältnis $\frac{x_2}{x_1}$ wird der Fehler groß und bei großem $\frac{x_2}{x_1}$ werden die Abweichungen von der Wirklichkeit nur klein sein. In Abb. 3 ist der Fehler bei der oben gemachten Näherung bei der Berechnung der Schwingungsdauer der Schüttelschwingung, bezogen auf die tatsächliche Schwingungsdauer, in Abhängigkeit von dem Verhältnis der Ausschläge x_2 und x_1 dargestellt. Ist $\frac{x_2}{x_1} = 10$, so beträgt der bei dieser Näherung gemachte Fehler 3,77%.

c) Schwingung mit vorgespannter Feder.

In Abb. 1c ist die bei dieser Schwingungsart vorhandene Federkennlinie dargestellt. Man erhält für die Schwingungsbewegung die Gleichung

$$x = (x_1 + x_2) \cos \sqrt{\frac{c}{m}} t - x_1.$$

Die gesamte Dauer des Schwingungsvorganges ist viermal so groß wie die Dauer der Schwingung von $\dot{x} = x_2$ bis $x = 0$, daher ist die Größe der Schwingungsdauer gegeben durch

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{m}{c}} \arccos \frac{x_1}{x_1 + x_2}.$$

Wird mit dem Näherungsansatz nach Gl. (2) gerechnet, so erhält man für die Arbeit der elastischen Kraft

$$A = \frac{1}{2} c (x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{2} c x_1^2$$

und damit den Näherungswert für die Schwingungsdauer

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \frac{x_1^2}{x_2^2}}}.$$

Auch bei dieser Schwingung ist das Ergebnis und damit die Rechengenauigkeit vom Verhältnis $\frac{x_2}{x_1}$ abhängig. Ist z. B. $x_2 = 5 x_1$, so erhält man durch die Näherungsrechnung eine um 7,99% zu kleine Schwingungsdauer.

d) Schwingungen mit symmetrischer Federkennlinie $c_1 x + c_3 x^3$.

Für diesen Fall gilt die Differentialgleichung für die Bewegung

$$m \ddot{x} + c_1 x + c_3 x^3 = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist mittels elliptischer Funktionen lösbar.¹⁰ Es soll aber auch für diese Schwingung das Näherungsverfahren angewendet werden. Setzt man wieder die Gl. (2) in die Arbeitsgleichung ein, so erhält man für die Schwingungsfrequenz die Gleichung

$$\omega = \sqrt{\frac{c_1}{m} + \frac{c_3 A^2}{2m}}.$$

Diese Gleichung kann verwendet werden, um eine Näherungslösung für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels zu erhalten. Für diese gilt die Differentialgleichung

$$l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0.$$

Entwickelt man $\sin \varphi$ in eine Reihe

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!}$$

¹⁰ G. Duffing: A. a. O.

und setzt die ersten zwei Glieder dieser Reihe in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) = 0$$

die Differentialgleichung einer Schwingung mit symmetrischer Kennlinie. Es ist also $c_1 = \frac{g m}{l}$ und $c_3 = -\frac{g m}{6 l}$, daher ist

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 - \frac{C^2}{12} \right)}.$$

Ist die Schwingungsamplitude C klein, so erhält man bei Anwendung bekannter Rechenvorteile für die Schwingungsdauer die Gleichung

$$\tau = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g} \frac{1}{1 - \frac{C^2}{12}}} = 2 \pi \left(1 + \frac{C^2}{12} \right) \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Der genaue Wert der Schwingungsdauer ist aus der Gleichung

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right]$$

berechenbar.¹¹ Ermittelt man sich z. B. für $C = \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ den Wert der Schwingungsdauer nach der genauen und der genäherten Methode, so ist der dabei gemachte Fehler 0.538%.

2. Erzwungene dämpfungsfreie nicht lineare Schwingungen.

Greift an der Masse noch eine erregende sinusförmige Kraft an, so lautet die Differentialgleichung für die Bewegung

$$m \ddot{x} + f(x) = P \sin k t.$$

Diese Gleichung kann durch Iteration¹² gelöst werden, es ist aber auch möglich, Näherungslösungen anzuwenden. Man nimmt für die Ausschläge zeitlich einen sinusförmigen Verlauf mit der Kreisfrequenz k an, also

$$x = C \sin k t.$$

Diese Annahme sollte die Differentialgleichung zu jeder Zeit¹³ befriedigen, also auch bei $k t = \frac{\pi}{2}$, dann ist $x = C$ und $\dot{x} = -k^2 C$. Setzt man diese Werte in die Differentialgleichung ein, so erhält man eine Bestimmungsgleichung für den Schwingungsausschlag C . Man kann aber auch mittels des Arbeitssatzes die Ausschläge bestimmen. Nimmt man wieder für den Ausschlag den sinusförmigen Verlauf an, so ist die Arbeit der erregenden Kraft

$$\int_0^C P \sin k t \cdot dx = \frac{1}{2} P C.$$

Daher erhält man zur Bestimmung des Größtausschlages die Gleichung

$$-\frac{1}{2} m C^2 k^2 + \int_0^C f(x) dx = \frac{1}{2} P C.$$

Durch Anwendung von graphischen oder rechnerischen Methoden ist daher die Größe des Größtausschlages berechenbar.

¹¹ F. Auerbach: A. a. O. S. 619.

¹² Rayleigh: A. a. O.

¹³ J. Bethenod: Sur le transformateur à résonance. Éclairage électrique 53, 289 (1907).
— R. Rüdenberg: Einige unharmonische Schwingungsformen mit großer Amplitude. Z. angew. Math. Mech. 3, 454 (1923).

Erzwungene Schwingungen des mathematischen Pendels.

Wendet man Vereinfachungen an, wie sie oben entwickelt wurden, so gilt für die erzwungenen Schwingungen des mathematischen Pendels die Differentialgleichung

$$m l \ddot{\varphi} + m g \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) = P \sin k t.$$

Setzt man für den Ausschlag $\varphi = C \sin k t$,

so erhält man bei Verwendung des Arbeitssatzes die Gleichung

$$-\frac{1}{2} m l C^2 k^2 + m g \left(\frac{C^2}{2} - \frac{C^4}{24} \right) = \frac{1}{2} P C.$$

Setzt man für

$$\omega^2 = \frac{g}{l},$$

das ist die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels bei kleinen Schwingungsausschlägen, so erhält man

$$-C \frac{k^2}{\omega^2} + C - \frac{C^3}{12} = \frac{P}{m \omega^2}.$$

Abb. 4 zeigt die Abhängigkeit des Größtausschlages von $\frac{k}{\omega}$ bei $\frac{P}{m \omega^2} = 0.2$. Für $0 > \frac{k}{\omega} > 0.71$ ergeben sich drei verschiedene reelle Werte der Amplituden, zwei

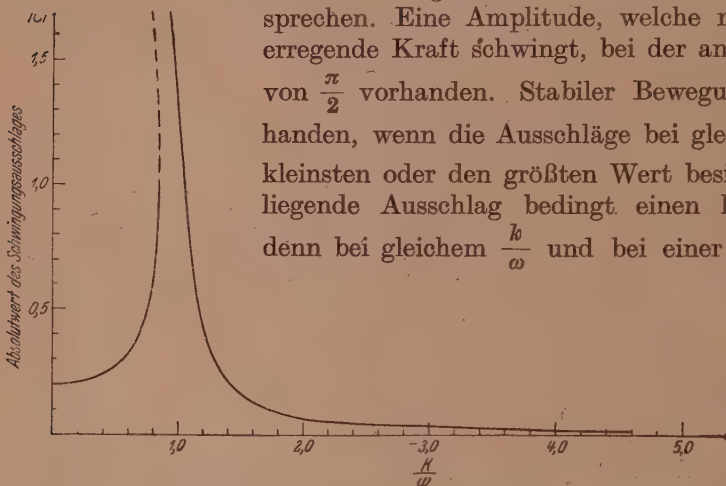


Abb. 4. Schwingungsdauer des mathematischen Pendels bei $\frac{P}{m^2} = 0.2$.

3. Gedämpfte erzwungene Schwingungen.

Ist nichtlineare Geschwindigkeitsdämpfung vorhanden, so kann man nach Jacobsen¹⁴ diese auf eine mit linearer Geschwindigkeitsdämpfung zurückführen. Es gilt dann die Differentialgleichung

$$m \ddot{x} + \beta \dot{x} + f(x) = P \sin k t.$$

β bedeutet den konstanten Dämpfungskoeffizienten.

Nimmt man wieder an, daß der zeitliche Verlauf der Schwingung durch eine sinusförmige ersetzbar sei, so ist

$$x = C \sin (k t + \vartheta).$$

¹⁴ L. S. Jacobsen: Steady Forced Vibration as Influenced by Damping. Trans. Amer. Soc. mechan. Engr. 52, APM 52—15 (1930).

Wäre die Federkennlinie eine Gerade $f(x) = c x$, so wäre

$$\operatorname{tg} \vartheta = - \frac{\beta k}{c - m k^2}.$$

Bei Annahme eines mittleren c ist die Phase ϑ berechenbar. Nun kann man wieder den Arbeitssatz anwenden. Bewegt sich die Masse während einer Viertelschwingung von 0 bis C , so entspricht dies den Zeiten $k t = - \vartheta$ und $k t = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ und man erhält

$$- \frac{1}{2} m C^2 k^2 + \beta \frac{\pi}{4} k C^2 + \int_0^C f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} P C \cos \vartheta - \frac{\pi}{4} P C k \sin \vartheta.$$

Wendet man rechnerische oder graphische Lösungsmethoden an, so kann man bei vorgegebenen Kräften und Frequenzen den zugehörigen Größtausschlag bestimmen.

(Eingegangen am 30. September 1946.)

Über die Stabilität des Gleichgewichtes bei einem durch Klemme und Hülse oder Klemme und Öse festgehaltenen elastischen Draht.

Von P. Funk, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

Unter einer Hülse verstehen wir eine Vorrichtung, bei der Punkt und Richtung für die die Gestalt des Drahtes kennzeichnende Linie vorgegeben ist. Dabei ist reibungsloses Gleiten des Drahtes vorausgesetzt. Bei einer Öse denkt man sich nur den Punkt, nicht aber die Richtung gegeben und es ist ebenfalls reibungsloses Gleiten vorausgesetzt.

Beide Probleme wurden in der Dissertation von Max Born¹ besprochen, aber der dort gemachte rein analytische Ansatz ergibt recht komplizierte Formeln, die zu sehr mühsamen Rechnungen führen und die einfache geometrische Bedeutung des Stabilitätskriteriums nicht erkennen lassen. Verwendet man aber die in meiner Arbeit: „Über die Stabilität der beiderseits eingespannten Elastika“² angegebene Lösung der Jakobischen Gleichung für das zugehörige Variationsproblem, so stellt sich ohne nennenswerte Rechnung sofort ein sehr anschauliches Ergebnis ein. Dieses Ergebnis läßt sich aber auch ohne Heranziehung der Theorie der zweiten Variation direkt durch eine elementare Betrachtung herleiten.

Dies soll im folgenden geschehen.

Fall I. Wenn der Draht durch Klemme und Hülse festgehalten ist, so ist Klemme und Hülse vertauschbar. Dies läßt sich von vornherein erwarten.

Anstatt nämlich einen durch Klemme und Hülse festgehaltenen Draht zu betrachten, kann man auch einen durch zwei Hülsen gehenden Draht betrachten, indem man die Klemme durch eine zweite Hülse ersetzt. Freilich erhält man dann statt des stabilen Gleichgewichtes ein indifferentes Gleichgewicht, da ja dann der Draht durch die beiden Hülsen verschieblich ist.

Denken wir uns nun für einen durch Klemme und Hülse festgehaltenen Draht die der Form des Drahtes entsprechende Elastika gezeichnet und verschoben wir den Ort der Hülse, so weit es mit der Stabilität des Gleichgewichtes vereinbar ist. Die Grenzlage für die durch Klemme und Hülse hindurchgehende Sehne, zu der wir so gelangen, wollen wir als kritische Sehne bezeichnen. Dann lautet unser Ergebnis:

¹ Max Born: Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in der Ebene und im Raum. Inauguraldissertation und gekrönte Preisschrift. Göttingen, 1906.

² P. Funk: Über die Stabilität der beiderseits eingespannten Elastika und ähnliche Fragen. Z. angew. Math. Mech. 5 (1925).

Die kritische Sehne steht senkrecht zur Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte, die zu ihren Schnittpunkten mit der Elastika gehören.

Zunächst seien für die in Betracht kommende Elastika einige bekannte Formeln und Tatsachen zusammengestellt. Die Achse der Kraft, die den von der Klemme ausgeübten Reaktionskräften entspricht, verlegen wir in die X -Achse. Sei P die Größe der Kraft, B das Steifigkeitsmaß, ϑ der Winkel, den das Bogenelement ds mit der x -Achse einschließt, R der Krümmungsradius und sei

$$a^2 = \frac{B}{P},$$

dann erhalten wir für die Elastika

$$\frac{a^2}{R} = a^2 \frac{d\vartheta}{ds} = -y, \quad (1)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \vartheta, \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta \quad (3)$$

bzw. durch Differentiation

$$a^2 \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} + \sin \vartheta = 0$$

und durch Integration folgt:

$$\frac{a^2}{2} \vartheta'^2 - \cos \vartheta = c. \quad (4)$$

Die linke Seite von (4) gibt im Fall der beiderseits eingeklemmten Elastika die Größe der Kraft, die nötig ist, um den Draht durch die Klemme hindurchzuschieben.³ In unserem Fall, wo wir es auf der einen Seite mit einer Hülse zu tun haben, ist diese Kraft und somit die Integrationskonstante gleich Null. Die Elastika schneidet die x -Achse rechtwinkelig. Man spricht dann von einer orthogonalen Elastika. Mit Rücksicht darauf und wegen (1) folgt

$$\frac{y^2}{2} = a^2 \cos \vartheta \quad (5)$$

und somit ist wegen (3)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{1 - \frac{y^4}{4a^4}}}{\frac{y^2}{2a^2}}.$$

Setzen wir

$$\frac{x}{\sqrt{2}a} = \xi, \quad \frac{y}{\sqrt{2}a} = \eta,$$

so erhalten wir für die orthogonale Elastika

$$\eta^2 = \cos \vartheta, \quad (6)$$

$$\xi = \int_0^\eta \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{1 - \eta^4}}. \quad (7)$$

Für $\eta < \frac{1}{2}$ ist mit hinreichender Genauigkeit

$$\xi = \frac{\eta^3}{3}. \quad (7a)$$

Setzt man $\eta = \cos \varphi$, so erhält man

$$\xi = \sqrt{2} \left[E\left(\frac{\pi}{4}, \varphi\right) - \frac{1}{2} F\left(\frac{\pi}{4}, \varphi\right) \right], \quad (8)$$

$$\xi(1) = 0.599.$$

Im Fall $c = 0$ läßt sich (4) mit Rücksicht auf (1) auch in der Form schreiben:

$$y = 2R \cos \vartheta. \quad (9)$$

³ Born, l. c.

Hieraus folgt: Bei der orthogonalen Elastika halbiert der Krümmungsmittelpunkt das Stück der Normalen zwischen Kurve und Kraftachse.

Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist die Tatsache, daß die orthogonale Elastika ihrer Gestalt nach vollkommen bestimmt ist. Alle in unserem Fall in Betracht zu ziehenden Kurven sind untereinander ähnlich. Wir denken uns nun Hülse und Klemme auf einem starren Verbindungsstab montiert und sehen dementsprechend für die zu bestimmende orthogonale Elastika eine Sehne und die beiden zugehörigen Schnittwinkel mit der Kurve als gegeben an. Um die zugehörige orthogonale Elastika zu finden, denken wir uns umgekehrt eine orthogonale Elastika gezeichnet und suchen jene Sehne, die den vorgegebenen Winkeln entspricht.

Wir bezeichnen die Winkel, die die Sehne $\overline{P_1 P_2}$ mit der Elastika E einschließt, mit α_1 bzw. α_2 . Dabei seien $\overline{P_1 P_2}$ und E entsprechend der positiven x -Achse orientiert, das Vorzeichen von α_1 bzw. α_2 entspreche dem Drehungssinn von $\overline{P_1 P_2}$ nach E und es sei

$$|\alpha_1| < \pi, \quad |\alpha_2| < \pi.$$

Fragen wir nun nach den Grenzen, die für α_1 bzw. α_2 in Betracht gezogen werden müssen, damit die Aufgabe lösbar ist, so können wir so vorgehen, daß wir eine Sehnenschar

$$\alpha_1 = \text{const.}$$

betrachten und jenes α_2 suchen, das einem extremalen Wert entspricht. Wir können uns dabei auf solche Bögen von E beschränken, die nur einen Wendepunkt in ihrem Inneren enthalten, denn Bögen, die keinen Wendepunkt in ihrem Inneren enthalten, sind sicher stabil, und Bögen, die zwei Wendepunkte enthalten, sind sicher instabil. Seien W_1, W_2 zwei aufeinanderfolgende Wendepunkte und seien s_1 bzw. s_2 die Bogenlängen $\overline{W_1 P_1}$ bzw. $\overline{W_2 P_2}$ auf E im positiven Sinn gemessen, dann können wir zunächst α_1 und α_2 als Funktionen von s_1 und s_2 auffassen.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1(s_1, s_2), \\ \alpha_2 &= \alpha_2(s_1, s_2). \end{aligned}$$

Fassen wir nun s_2 als Funktion von s_1 auf,

$$s_2 = s_2(s_1),$$

dann gilt allgemein für konstantes α_1 :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_2} \frac{ds_2}{ds_1} = 0$$

und für den Extremwert von α_2 :

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2} \frac{ds_2}{ds_1} = 0.$$

Hieraus folgt für den Extremwert

$$\frac{D(\alpha_1, \alpha_2)}{D(s_1, s_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2} \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Bezeichnen wir die Länge der Sehne mit Ω , so gilt

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s_1} = -\cos \alpha_1, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial s_2} = \cos \alpha_2$$

und wegen

$$\frac{D(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2)}{D(s_1, s_2)} = \frac{D(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} \cdot \frac{D(\alpha_1, \alpha_2)}{D(s_1, s_2)},$$

ist Gl. (10) somit im wesentlichen gleichwertig mit

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial s_1^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial s_1 \partial s_2} \right)^2 = 0. \quad (11)$$

Im allgemeinen wird durch (10) bzw. (11) auch tatsächlich ein Extremwert von α_2 bei festgehaltenem α_1 dargestellt sein. Daraus kann man schließen, daß sich in der Umgebung einer solchen Sehne zwei Sehnen angeben lassen, die mit der Elastika die Winkel $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2$ bzw. $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2$ einschließen, so daß

$$\overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_1, \quad \overline{\alpha}_2 = \overline{\alpha}_2$$

ist. In diesem Fall wären also zwei unendlich benachbarte Gleichgewichtslagen möglich; ein derartiges Verhalten ist für die Stabilitätsgrenze kennzeichnend und somit ist durch (10) bzw. (11) die Lage der kritischen Sehne gegeben.

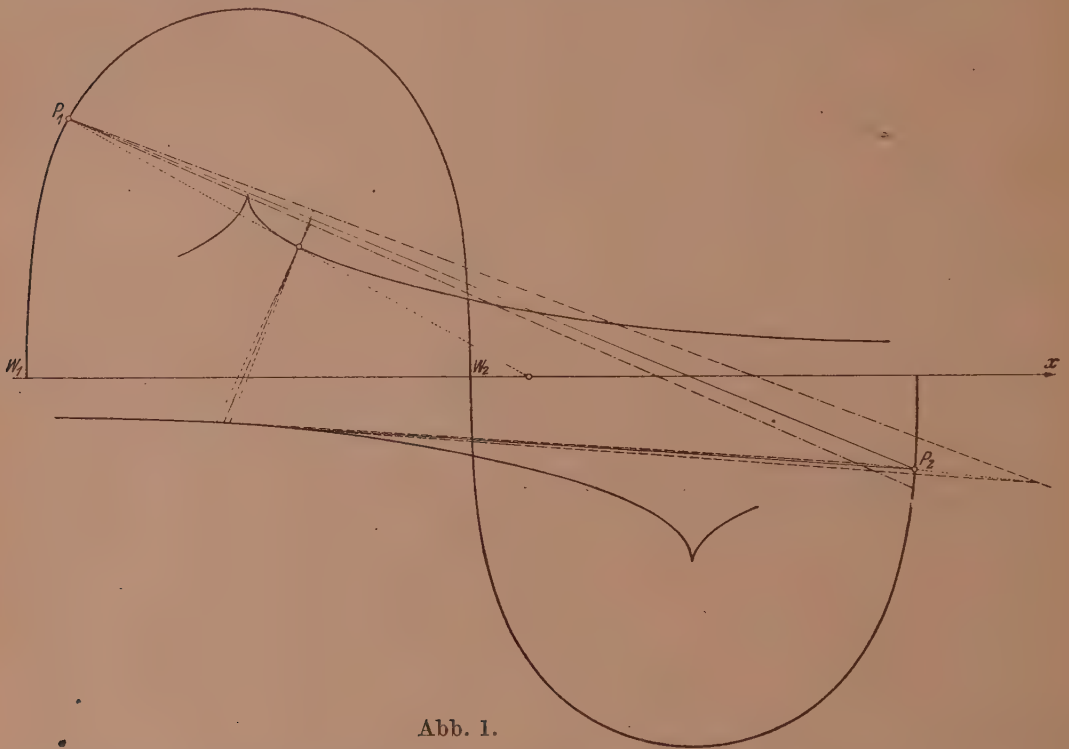


Abb. 1.

Durch eine kleine kinematische Überlegung gelangen wir von (10) aus zu dem in der Einleitung angekündigten Satz.

Betrachten wir ein durch einen festen Winkel α_1 begrenztes Ebenenstück und lassen wir es mit dem Scheitel so auf der Elastika gleiten, daß der eine Schenkel die Elastika ständig berührt. Dann ist offenbar das Momentanzentrum identisch mit dem Krümmungsmittelpunkt. Betrachten wir noch die Kurve, die der zweite Schenkel einhüllt, dann hat der Geschwindigkeitsvektor der Geraden im Berührungspunkt des zweiten Schenkels mit seiner Einhüllenden die Richtung der Geraden selbst. Daher steht die Verbindungslinie des Krümmungsmittelpunktes mit dem Berührungspunkt auf der Geraden senkrecht. Da nun α_1 und α_2 in (10) symmetrisch vorkommen, folgt hieraus unmittelbar unser Satz. Dieser Satz ermöglicht eine einfache geometrische Konstruktion der kritischen Sehne. Nach dem im Anschluß an (9) hervorgehobenen Satz läßt sich die Evolute der Elastika leicht konstruieren. Abb. 1 zeigt, wie man dann mit einem der Regula falsi entsprechenden Verfahren vorzugehen hat.⁴ Abb. 2 zeigt mehrere nach dieser Methode ermittelte kritische Sehnen. Die Formeln (7) und (8) gestatten eine numerische Überprüfung dieser Ergebnisse.

⁴ Man ziehe durch den Punkt P_1 versuchsweise eine Sehne, hierauf senkrecht dazu durch den zu P_1 gehörigen Krümmungsmittelpunkt eine Gerade und verfolge diese bis zu ihrem Schnitt-

Fall II. Ganz ähnlich kann man auch den Fall des durch Klemme und Öse festgehaltenen Drahtes behandeln. Da durch eine Öse nur eine zum Draht senkrecht

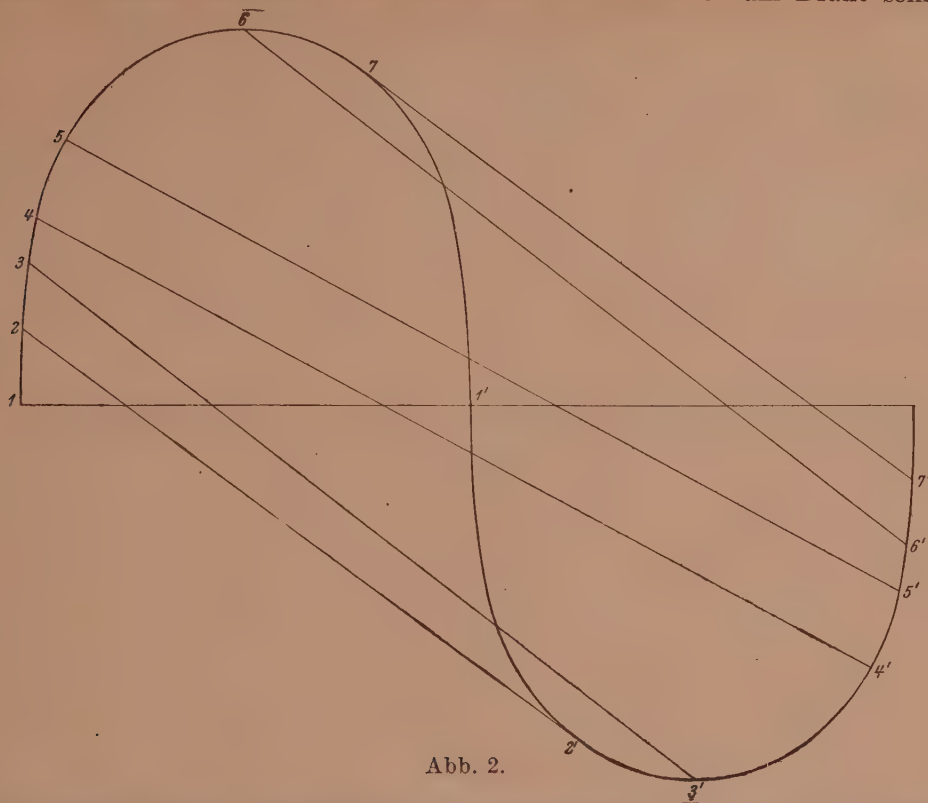


Abb. 2.

stehende Reaktionskraft ausgeübt werden kann, muß die Öse mit dem Ort des Wendepunktes zusammenfallen. Die kritische Sehne ist dann jene durch den Wendepunkt (Öse) gehende Sehne, die bei ihrem zweiten Schnittpunkt, also bei der Klemme, mit der Elastika einen extremalen Winkel einschließt. Bezüglich der Lage der kritischen Sehne gilt ein analoger Satz wie im oben besprochenen Fall: Verbindet man den der Klemme zugehörigen Krümmungsmittelpunkt mit dem Wendepunkt, so steht diese Gerade senkrecht auf der kritischen Sehne.

Dieser Satz führt wieder zu einer einfachen graphischen Methode, um die Lage der kritischen Sehne zu ermitteln (vgl. Abb. 3). Man hat nur durch Probieren einen solchen rechten Winkel mit dem Scheitel im Wendepunkt zu finden, für den die Ordinate des Schnittpunktes des einen Schenkels mit der Elastika doppelt so groß

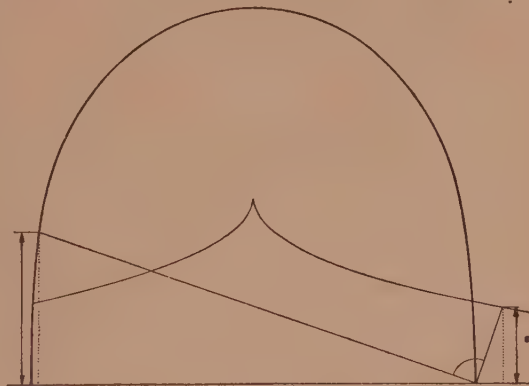


Abb. 3.

punkt mit dem zweiten Evolutenzweig. In diesem Schnittpunkt ziehe man die Tangente an die Evolute und bringe sie mit der angenommenen Sehne zum Schnitt und beachte den Abstand dieses Schnittpunktes von der Elastika. Zwei Versuche genügen im allgemeinen, um mit hinreichender Genauigkeit die wahre Lage der kritischen Sehne zu finden. Die Durchführung der Näherungskonstruktion stammt im ersten Entwurf von W. Fröhlich (†).

ist als die Ordinate des Schnittpunktes des anderen Schenkels mit der zugehörigen Evolute.

Hat man die Ordinate des Schnittpunktes der kritischen Sehne mit der Elastika gefunden, so ermittelt man leicht unter Benützung von (6), (7) und (8) den Wert des Winkels, den die Tangente mit der Kraftachse einschließt, mit $81^\circ 25'$,⁵ und den Winkel, den die kritische Sehne mit der Elastika bildet, mit $77^\circ 30'$.

In beiden Fällen versuchte Born die Ergebnisse der Richtung mit Experimenten zu vergleichen. In Fall I gelang nur eine qualitative Überprüfung, da die Realisierung einer Hülse große Schwierigkeiten verursacht. Im Fall II wurde an Stelle eines Drahtes ein Stahlband und an Stelle der Öse eine Rolle mit kleinem Radius verwendet. Hier gelangte Born zu einer befriedigenden Übereinstimmung von Rechnung und Experiment.

(Eingegangen am 2. Oktober 1946.)

Wechselfelder, Kreisdrehfelder und elliptische Drehfelder.

Von W. Gauster-Filek, Wien.

Mit 19 Textabbildungen.

Vorbemerkung.

Das Grundsätzliche der hier dargestellten Überlegungen stammt aus den Jahren 1922 und 1923, zu welcher Zeit ich an Prof. Dr. Karl Wolfs Lehrkanzel Assistentendienste leistete. Ein wesentlicher Teil davon findet sich in meiner Doktor-Dissertation „Über elliptische Drehfelder“ (Technische Hochschule Wien, 1923), die damals jedoch nicht im Druck erschien. Trotz des langen, inzwischen verstrichenen Zeitraumes sind mir keine Veröffentlichungen bekannt geworden, die meine damals für elliptische Drehfelder entwickelte Darstellungsweise überholt erscheinen ließen. Ich habe im Gegenteil gefunden, daß es wünschenswert sein dürfte, auch die damit in enger Verbindung stehenden Sinusfelder und Sinusschwingungen in eine kurze übersichtliche Darstellung einzubeziehen, da nämlich — trotz der zahlreichen darüber vorliegenden Veröffentlichungen¹ — doch so manches unklar und unzweckmäßig zu sein scheint und zu Irrtümern Anlaß geben kann. Es wurden daher in den Abschnitten I und III die wichtigsten Definitionen und Regeln über Sinusfunktionen und Sinusschwingungen, in Abschnitt VII einige Sätze über elliptische Drehfelder zusammengestellt, so daß an anderer Stelle jeweils nur ein kurzer Hinweis nötig ist. Die zusammenfassenden Abschnitte sind durch kleineren Druck kenntlich gemacht.

So sei mir erlaubt, den festlichen Anlaß des Erscheinens dieses Heftes zu benützen, um — im herzlichen Gedenken an die schöne Zeit

⁵ In Übereinstimmung von M. Born.

¹ An grundlegenden Arbeiten über die symbolische Behandlung von Sinusschwingungen seien genannt: Helmholtz: *Telephon und Klangfarbe*. Berl. Ak. 1878, 488—500. — Lord Rayleigh: *On forced harmonic oscillations of various periods*. Phil. Mag. Vol. 21, 369—394. — A. Francke: *Die elektrischen Vorgänge in Fernsprecheinrichtungen und Apparaten*. ETZ. 1891 — 12, 447—452, 458—463. — C. P. Steinmetz: *Die Anwendung komplexer Größen in der Elektrotechnik*. ETZ. 1893 — 14, 597—599, 631—635, 641—643, 653—654. Die Rechnung mit Zeigern und komplexen Zahlen wurde bald auf alle in Betracht kommenden praktischen Aufgaben der Elektrotechnik angewandt und es entstanden auch zahlreiche, zum Teil sehr gute zusammenfassende Darstellungen. Wertvolle Klarstellungen brachte die Arbeit von F. Emde: *Schwingungen und Vektoren* (Arch. Math. Phys. 25—1916, 9—17), worin auch der Name Oszillator für den im folgenden verwendeten Ausdruck Zeiger vorgeschlagen wird. Bezüglich der symbolischen Behandlung von elliptischen Drehfeldern sei auf die „komplexen Vektoren“ von F. Emde, a. a. O. und auf die „Bivektoren“ verwiesen, die behandelt werden in Gibbs-Wilson: *Vektor Analysis*, 426—436. New York and London. 1907.

meiner Tätigkeit unter Karl Wolfs Leitung — diesen Beitrag zur Verfügung zu stellen.

I. Addition von Sinusfunktionen, Zeiger, komplexe Zahlen, Differentialquotient von Sinusfunktionen.

Die Grundlage für die folgenden Betrachtungen bildet die bekannte Entwicklung der Summe mehrerer Sinusfunktionen ein und derselben unabhängigen Veränderlichen φ . Sind mehrere Sinusfunktionen von der Form

$$f_k(\varphi) = a_k \sin(\varphi + \alpha_k) \quad k = 1, 2 \dots n$$

gegeben, so ist zunächst

$$k \sum_1^n f_k(\varphi) = \left(k \sum_1^n a_k \cos \alpha_k \right) \sin \varphi + \left(k \sum_1^n a_k \sin \alpha_k \right) \cos \varphi.$$

Setzt man

$$k \sum_1^n a_k \cos \alpha_k = a \cos \alpha,$$

$$k \sum_1^n a_k \sin \alpha_k = a \sin \alpha,$$

so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} k \sum_1^n f_k(\varphi) &= k \sum_1^n a_k \sin(\varphi + \alpha_k), \\ &= a \sin(\varphi + \alpha), \\ &= f(\varphi), \\ a^2 &= \left(k \sum_1^n a_k \cos \alpha_k \right)^2 + \left(k \sum_1^n a_k \sin \alpha_k \right)^2, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{k \sum_1^n a_k \sin \alpha_k}{k \sum_1^n a_k \cos \alpha_k}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Auf diese Weise ist es also möglich, die Summe mehrerer Sinusfunktionen durch eine einzige Sinusfunktion darzustellen.

Diese Formeln können unmittelbar geometrisch gedeutet werden. Wir wollen im folgenden voraussetzen, daß a stets reell und positiv ist, was keine Einschränkung bedeutet, da man entweder ein Minuszeichen vor die Sinusfunktion setzen oder auch α um π vermehren kann. Wir wählen nun irgendeine feste „Nullage“, die wir als x -Achse eines ebenen Koordinatensystems auffassen wollen, ferner setzen wir ein für allemal den positiven Drehsinn entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn fest, wodurch sich die Richtung der y -Achse ergibt. Ist eine Sinusfunktion $f_k(\varphi) = a_k \sin(\varphi + \alpha_k)$ gegeben, so ordnen wir der Amplitude a_k den Betrag $|a_k|$ einer gerichteten Strecke a_k zu, die mit der x -Achse den Winkel α_k einschließt. Dann ist deren x -Komponente $A_k = a_k \cos \alpha_k$, die y -Komponente $B_k = a_k \sin \alpha_k$. Für die geometrische Summe a mehrerer gerichteter Strecken a_k ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} a &= k \sum_1^n a_k, \\ A &= a \cos \alpha = k \sum_1^n a_k \cos \alpha_k, \\ B &= a \sin \alpha = k \sum_1^n a_k \sin \alpha_k, \\ a^2 &= A^2 + B^2 = \left(k \sum_1^n a_k \cos \alpha_k \right)^2 + \left(k \sum_1^n a_k \sin \alpha_k \right)^2, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{A}{B} = \frac{k \sum_1^n a_k \sin \alpha_k}{k \sum_1^n a_k \cos \alpha_k}. \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

in vollkommener Übereinstimmung mit Gl. (1). Wir wollen die gerichteten Strecken a_k die den Sinusfunktionen $f_k(\varphi) = \sin(\varphi + \alpha_k)$ zugeordneten „Zeiger“ nennen und können somit folgenden Satz aussprechen: Der Zeiger der Summe der Sinusfunktionen $f_k(\varphi)$ ist die geometrische Summe der Zeiger dieser Sinusfunktionen.

Wie man sieht, ist diese Einführung der Zeiger unabhängig davon, welche Bedeutung die unabhängige Veränderliche φ hat. Wir halten es für zweckmäßig, zunächst von dieser rein formalen Zuordnung auszugehen und erst später die räumliche und die kinematische Deutung zu besprechen. An Stelle des Ausdruckes „Zeiger“ findet man auch oft die Bezeichnung „Vektor“, die man jedoch in diesem Falle vermeiden sollte. Die gerichtete Strecke, die der Sinusfunktion zugeordnet wird, hat nämlich keine unmittelbare geometrische Bedeutung unabhängig vom Koordinatensystem und es wäre verfehlt, wie dies öfters geschehen ist, die Rechenregeln der Vektoranalysis für die vorliegenden Zwecke künstlich zurechtzumachen.

Hingegen ist es vorteilhaft, von der Darstellung der Zeiger durch komplexe Zahlen Gebrauch zu machen. Zu diesem Zwecke legen wir die reelle Achse der Gauß'schen Zahlenebene in die x -Achse des früher eingeführten Koordinatensystems. Dann entspricht der y -Achse die imaginäre Achse und wir wollen die imaginäre Einheit mit j bezeichnen, da man in der Elektrotechnik den Buchstaben i meist für die Bezeichnung der Stromstärke vorbehält. Dem Zeiger a mit den Komponenten $A = a \cos \alpha$ und $B = a \sin \alpha$ entspricht dann die komplexe Zahl

$$a = A + j B = a (\cos \alpha + j \sin \alpha) = a e^{j\alpha}. \quad (2)$$

Wir bezeichnen a als „Symbol“ $S[f(\varphi)]$ der Sinusschwingung

$$f(\varphi) = a \sin(\varphi + \alpha) = A \sin \varphi + B \cos \varphi$$

und können somit schreiben:

$$\left. \begin{aligned} a &= S[f(\varphi)] = S[A \sin \varphi + B \cos \varphi] = a e^{j\alpha}, \\ S(A \sin \varphi + B \cos \varphi) &= A + j B. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Man merke sich die speziellen Fälle

$$\left. \begin{aligned} S(a \sin \varphi) &= a, \\ S(a \cos \varphi) &= j a. \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

Der früher für die Summe der Zeiger von Sinusfunktionen abgeleitete Satz kann nunmehr in folgender Form dargestellt werden:

$$S \left[k \sum_1^n f_k(\varphi) \right] = k \sum_1^n S[f_k(\varphi)]. \quad (4)$$

Man kann auch umgekehrt fragen, welche Sinusfunktion durch eine gegebene komplexe Zahl dargestellt wird, was wir, wie folgt, schreiben wollen:

$$\left. \begin{aligned} S^{-1}(a e^{j\alpha}) &= a \sin(\varphi + \alpha), \\ S^{-1}(A + j B) &= A \sin \varphi + B \cos \varphi, \\ S^{-1}\{S[f(\varphi)]\} &= f(\varphi), \\ S[S^{-1}(a)] &= a. \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

Schließlich wollen wir eine sehr einfache und oft verwendete Formel für den ersten und die höheren Differentialquotienten einer Sinusfunktion $f(\varphi)$ ableiten. Wir bilden:

$$S \left[\frac{df(\varphi)}{d\varphi} \right] = S \left[\frac{d}{d\varphi} (A \sin \varphi + B \cos \varphi) \right] = S(A \cos \varphi - B \sin \varphi) = j A - B = j(A + j B).$$

Und somit:

$$S \left[\frac{df(\varphi)}{d\varphi} \right] = j S[f(\varphi)]. \quad (5)$$

Für die n -te Ableitung folgt:

$$S \left[\frac{d^n f(\varphi)}{d\varphi^n} \right] = (j^n) S[f(\varphi)]. \quad (5a)$$

Die Bildung der Differentialquotienten von Sinusfunktionen in symbolischer Form ist also sehr einfach. Denkt man an die Ableitung der Zeiger durch komplexe Zahlen in der Gauß'schen

Zahlenebene, so erkennt man, daß die Bildung der Differentialquotienten eine Drehung des Zeigers um $\frac{\pi}{2}$ in der positiven Umdrehungsrichtung bedeutet.

Hingegen läßt sich die Zeigerdarstellung bei der Produktbildung nicht unmittelbar anwenden. Die eingeführte Symbolik setzte stets Sinusfunktionen der Form $a \sin(\varphi + \alpha)$ voraus. Das Produkt zweier Sinusfunktionen

$$a_1 \sin(\varphi + \alpha_1) \cdot a_2 \sin(\varphi + \alpha_2) = \frac{a_1 a_2}{2} [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos(2\varphi + \alpha_1 + \alpha_2)]$$

besteht jedoch aus der Differenz eines konstanten Teiles und einer Sinusfunktion der doppelten unabhängigen Veränderlichen. Es wurden symbolische Rechenmethoden für Sinusfunktionen unter Berücksichtigung der höheren Harmonischen entwickelt,² die sich jedoch in der Praxis nicht durchsetzen konnten. Wir wollen darauf nicht näher eingehen. Schließlich sei darauf hingewiesen, daß öfters von der Zeigerdarstellung von Sinusfunktionen in etwas anderer Form Gebrauch gemacht wird. Man geht dabei nicht von $f(\varphi) = a \sin(\varphi + \alpha)$, sondern von der Funktion $g(\varphi) = a \cos(\varphi - \alpha)$ aus und benützt dann zweckmäßigerweise den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} S[g(\varphi)] &= S[a \cos(\varphi - \alpha)] = a e^{j\alpha}, \\ S(A \cos \varphi + B \sin \varphi) &= A + j B. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Mit den speziellen Fällen

$$\left. \begin{aligned} S(a \cos \varphi) &= a, \\ S(a \sin \varphi) &= j a. \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

Auch unter dieser Annahme gelten sinngemäß die Gl. (4), (5) und (5a). Hingegen führt beispielsweise der Ansatz $S[a \cos(\varphi + \alpha)] = a e^{j\alpha}$ zu $S(a \sin \varphi) = -j a$, ist also nicht zweckmäßig.

II. Das Sinusfeld.

Wir haben bisher keinerlei Annahme über die Bedeutung der unabhängigen Veränderlichen φ gemacht und wollen nunmehr zunächst davon ausgehen, daß φ einen Winkel darstellt. Man kommt dabei zu etwas anschaulicheren Resultaten, wenn man den Ansatz $g(\varphi) = a \cos(\varphi - \alpha)$ benutzt. Es sei nun ein Kreis mit dem Radius r

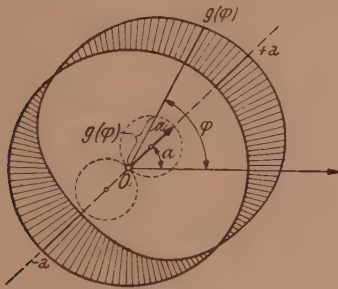


Abb. 1 a.

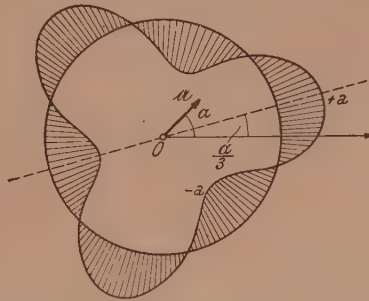


Abb. 1 b.

gegeben und es soll jedem Punkt desselben (der zugehörige Zentriwinkel, von einer festen Nullage gezählt, sei φ) ein bestimmter Wert der Funktion $g(\varphi)$ entsprechen (s. Abb. 1a). Der zugehörige Zeiger $a = a e^{j\alpha}$ ist gegen die Nullage unter dem Winkel α geneigt und zeigt nach dem Maximum von $g(\varphi)$. Man erhält den Wert von $g(\varphi)$ für eine beliebige Richtung, wenn man die Projektion des Zeigers auf diese Richtung bildet. Wir sprechen in diesem Falle von einem einfachen oder zweipoligen Sinusfeld.

Beim „2 p -poligen Sinusfeld“ nimmt $g(\varphi)$ die Form $g(\varphi) = a \cos(p\varphi - \alpha)$ an (s. Abb. 1 b). Den zugehörigen Zeiger $a = a e^{j\alpha}$ hat man sich wieder unter dem Winkel α

² Vgl. J. H. M. Manders: Applications of direct analysis to pulsating and oscillating phenomena. Dissertation Delft, 1919.

gegen die Nullage geneigt zu denken, gleichgültig, wie groß die Polzahl $2p$ ist. Das erste Maximum von $g(\varphi)$ tritt beim Winkel $\frac{\alpha}{p}$ auf. Liegt die Polzahl $2p$ fest, so ist durch den Zeiger das Sinusfeld bestimmt und es kann beispielsweise der früher abgeleitete Satz über die Summenbildung auf mehrere Sinusfelder gleicher Polzahl angewendet werden. Wie später näher ausgeführt wird, ist es notwendig, außer dem ruhenden Sinusfeld auch pulsierende Sinusfelder (Wechselfelder) und gleichförmig rotierende Sinusfelder (Drehfelder) zu betrachten. Zu diesen Zwecken erweist sich die Zeigerdarstellung als besonders vorteilhaft.³

III. Sinusschwingung, kinematische Deutung der Zeiger, lineare Differentialgleichung.

Führt man an Stelle der unabhängigen Veränderlichen φ der Sinusfunktion $f(\varphi) = a \sin(\varphi + \alpha)$ die Zeit t in der Form $\varphi = \omega t$ ein (ω wird als Winkelgeschwindigkeit bezeichnet), so spricht man von einer Sinusschwingung

$$F(t) = a \sin(\omega t + \alpha). \quad (7)$$

In diesem Falle ist es möglich, die Zeigerdarstellung in anschaulicher Weise kinematisch zu deuten. Zu diesem Zwecke denken wir uns wie früher von einer willkürlich gewählten Nullage aus (die mit der Richtung der x -Achse eines ebenen Koordinatensystems zusammenfallen soll) den Zeiger mit dem Betrag a unter dem Winkel α aufgetragen, lassen ihn jetzt aber zur Zeit $t = 0$ beginnend, mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig rotieren. Der Endpunkt des Zeigers bewegt sich auf einem Kreis und seine Projektion auf die y -Achse ist dann die vorgegebene Funktion $F(t) = a \sin(\omega t + \alpha)$. Damit haben wir in einfachster Weise eine anschauliche kinematische Deutung der Zeigerdarstellung erhalten. Wir wollen in diesem Zusammenhang die y -Achse als „Projektionsgerade“ (entsprechend dem Ausdruck „Projektionsebene“) bezeichnen.

Geht man von der Kosinusfunktion $g(\varphi)$ aus, so erhält man für die Sinusschwingung $G(t) = a \cos(\omega t - \alpha)$. Zur kinematischen Deutung läßt man die „Projektionsgerade“ mit der Nullage zusammenfallen und muß sich nunmehr den Zeiger im negativen Sinne gleichförmig umlaufend denken. Es gelten dann sinngemäß alle für $F(t)$ angestellten Überlegungen, weshalb wir im folgenden die zweite Form der Darstellung meistens nicht mehr besonders erwähnen.

Die Bildung der ersten Ableitung nach der Zeit kann ebenfalls anschaulich gedeutet werden. Da der Zeiger der Differenz zweier Sinusschwingungen gleich der geometrischen Differenz der Zeiger dieser Sinusschwingungen ist, so ist der Geschwindigkeitsvektor des Endpunktes des gleichförmig rotierenden Zeigers a der Sinusfunktion $a \sin(\omega t + \alpha)$ der Zeiger ihrer ersten Ableitung nach der Zeit $\omega a \cos(\omega t + \alpha)$. Die erste Ableitung wird also durch einen Zeiger dargestellt, dessen Betrag ω -mal so groß als der des ursprünglichen Zeigers ist und der gegen diesen um $\frac{\pi}{2}$ im positiven Sinne gedreht ist. In komplexer Darstellung erhält man:

$$S \left[\frac{dF(t)}{dt} \right] = j \omega \varphi [F(t)]. \quad (8)$$

Für die n -te Ableitung nach der Zeit folgt:

$$S \left[\frac{d^n F(t)}{dt^n} \right] = (j \omega)^n S [F(t)]. \quad (8a)$$

Diese Formel erlaubt eine sehr wichtige Anwendung. Bekanntlich besitzt jede lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren Störungsfunktion eine Sinusfunktion ist, eine partikuläre Lösung in Form einer Sinusfunktion gleicher Winkelgeschwindigkeit. Diese ist für die in den Anwendungen praktisch auftretenden Fälle von besonderer Wichtigkeit, da sie die quasistationäre Lösung nach Abklingen des Ausgleichszustandes darstellt. Es sei

$$k_0 y + k_1 \frac{dy}{dt} + k_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \dots + k_n \frac{d^n y}{dt^n} = a \sin(\omega t + \alpha) = x(t). \quad (9)$$

Dann folgt aus den Gl. (4) und (8a)

$$[k_0 + (\omega j) k_1 + (\omega j)^2 k_2 + \dots + (\omega j)^n k_n] S(y) = S[x(t)].$$

³ Vgl. Bödefeld-Sequenz: Elektrische Maschinen, 3. Aufl., S. 114, Wien 1945, wo jedoch auf die Zeigerdarstellung des $2p$ -poligen Feldes nicht eingegangen wird.

Setzt man

$$S(x) = \mathfrak{x},$$

$$S(y) = \mathfrak{y},$$

so erhält man

$$\mathfrak{y} = \frac{\mathfrak{x}}{k_0 + (\omega j) k_1 + (\omega j)^2 k_2 + \dots + (\omega j)^n k_n} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{z}}, \quad (10)$$

woraus sich nach Gl. (3b) $y = S^{-1}(\mathfrak{y})$ ergibt. Der Ausdruck

$$\mathfrak{z} = k_0 + (\omega j) k_1 + (\omega j)^2 k_2 + \dots + (\omega j)^n k_n$$

ist eine gewöhnliche komplexe Zahl und darf nicht als Zeiger aufgefaßt werden. $S^{-1}(\mathfrak{z}) = S^{-1}\left[\frac{S(x)}{S(y)}\right]$ ist natürlich eine sinnlose Bildung. In der Elektrotechnik wird für \mathfrak{z} oft der Ausdruck „komplexer Widerstandsoperator“ oder kurz auch „komplexer Widerstand“ gebraucht. Die große Anschaulichkeit der Zeigerdarstellung bei der Summenbildung und bei der Lösung des erwähnten, für die Anwendung besonders wichtigen Typus von Differentialgleichungen ist die Ursache, warum die Zeigerdarstellung und die komplexe Rechnung in der Elektrotechnik allgemein verwendet wird.

Zum Schlusse dieses Abschnittes noch folgende Bemerkungen: Bei elektrotechnischen Rechnungen wird öfters der Betrag des Zeigers nicht der Amplitude a der Sinusschwingung, sondern dem Effektivwert $\frac{a}{\sqrt{2}}$ gleichgesetzt, wodurch sich natürlich für die Betrachtungen nichts wesentlich ändert. Man kann ferner bei der kinematischen Deutung der Sinusschwingung die Zeiger ruhen und dafür die Projektionsgerade im entgegengesetzten Sinne rotieren lassen. Wir haben hier die erstere Annahme bevorzugt, die auch allein in Betracht käme, wenn man höhere Harmonische durch Zeiger darstellen wollte. Hingegen ist die Darstellung mit rotierender Projektionsgeraden bei Mehrphasenproblemen von Vorteil. Schließlich sei darauf hingewiesen, daß bei der symbolischen Rechnung wohl stets eine ganz bestimmte konstante Winkelgeschwindigkeit ω vorausgesetzt ist, daß aber das Resultat der Rechnung selbstverständlich für verschiedene Werte von ω diskutiert werden kann. Besonders anschaulich geschieht dies dadurch, daß man den komplexen Widerstandsoperator \mathfrak{z} in seine reelle und imaginäre Komponente zerlegt und die „Ortskurve“ $\mathfrak{z}(\omega) = v(\omega) + jw(\omega)$ in der Gauß'schen Zahlenebene bestimmt. Darüber gibt es zahlreiche Veröffentlichungen.⁴

IV. Pulsierende und rotierende Vektoren, Wechselfelder und Drehfelder.

Wir wollen zunächst Vektoren in einer Ebene betrachten, deren Beträge zeitlich veränderlich sind, die jedoch ihre Richtung beibehalten. Läßt sich die zeitliche Abhängigkeit des Betrages durch eine Sinusfunktion darstellen, so wollen wir von „pulsierenden Vektoren“ sprechen:

$$\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{A}_0 \sin(\omega t + \alpha), \quad (11)$$

$$|\mathfrak{A}(t)| = A(t) = A_0 \sin(\omega t + \alpha). \quad (11a)^5$$

Wir denken hier zunächst an Größen, die ihrer physikalischen Natur nach Vektoren sind. Betrachten wir z. B. eine lange, eisenlose Spule, die von zeitlich sinusförmigem Wechselstrom durchflossen wird, so sind magnetische Felddichte \mathfrak{B} und magnetische Feldstärke \mathfrak{H} in jedem Punkte im Innern dieser Spule durch pulsierende Vektoren darstellbar.

Nach Gl. (11a) ist der Betrag $A(t)$ eines pulsierenden Vektors eine Sinusschwingung entsprechend Gl. (7) und kann daher durch einen Zeiger dargestellt werden. Man könnte zunächst dessen Projektionsgerade willkürlich wählen, es empfiehlt sich aber,

⁴ Vgl. O. Bloch: Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik. Zürich. 1917. Eine neuere zusammenfassende Darstellung ist: G. Oberdorfer: Die Ortskurventheorie der Wechselstromtechnik. Oldenbourg, München 1934.

⁵ Eine Verwechslung der Größe $A = |\mathfrak{A}|$ mit A entsprechend Gl. (1a) ist wohl nicht zu befürchten.

die Richtung der Projektionsgeraden mit der Richtung des Vektors \mathfrak{A} zusammenfallen zu lassen (s. Abb. 2). Wir nennen in diesem besonderen Falle die Projektionsgerade „Richtungsgerade“ und bezeichnen sie durch eine römische Ziffer. Der zugehörige Zeiger sei durch die entsprechende arabische Ziffer gekennzeichnet. Richtungsgerade und Zeiger bestimmen so auf einfache Weise den pulsierenden Vektor.⁶

Wir wollen ferner ebene Vektoren betrachten, deren Betrag unveränderlich ist und die im positiven oder negativen Sinne gleichförmig rotieren. Wir wollen einen solchen Vektor „Dreher“ nennen⁷ und sinngemäß von „Plusdrehern“ und „Minusdrehern“ sprechen. Eine einfache Realisierung eines Minusdrehers ist ein Uhrzeiger. Selbstverständlich haben die „Dreher“ mit der kinematischen Deutung der Zeigerdarstellung keinen unmittelbaren Zusammenhang. Zur graphischen Darstellung der Dreher zeichnen wir den betreffenden rotierenden Vektor in seiner Lage zur Zeit $t = 0$ (s. Abb. 3) und kennzeichnen Plus- und Minusdreher durch entsprechende Pfeilspitzen in der Drehrichtung. Als Bezeichnung wählen wir arabische Ziffern mit einem

(Plus-) oder zwei Strichen (Minusdreher). Die Lage des rotierenden Vektors $\mathfrak{B}(t)$ zu einer beliebigen Zeit t erhält man durch Auftragen des Winkels ωt , ausgehend von der Anfangslage, und es ist dieser Momentanwert $\mathfrak{B}(t)$ durch das gewöhnliche Zeichen für einen Vektor (Pfeilspitze in der Vektorrichtung) dargestellt. Aus der

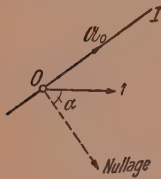


Abb. 2.

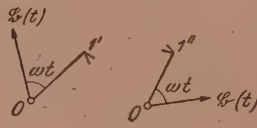


Abb. 3.

Minus-) drehern folgt, daß die Summe mehrerer Dreher gleicher Art wieder ein solcher ist und durch die geometrische Summe der einzelnen Dreher dargestellt wird. Zwei Dreher gleicher Art von gleichem Betrag, aber entgegengesetzter Richtung, heben sich auf.

Wie im Abschnitt II gezeigt wird, läßt sich ein $2p$ -poliges ruhendes Sinusfeld in einfacher Weise durch einen Zeiger darstellen. Wir wollen nun unter einem „pulsierenden Sinusfeld“ oder „Wechselfeld“ die Verteilung einer skalaren Veränderlichen längs des Umfanges eines Kreises in der Form

$$G(\varphi, t) = a_0 \cos(p\varphi - \alpha) \cdot \sin(\omega t + \beta) \quad (12)$$

verstehen, d. h. die Verteilung entspricht Abb. 1, nur mit dem Unterschied, daß an Stelle der zeitlich unveränderlichen Größe a jeweils der Momentanwert $a_0 \sin(\omega t + \beta)$ aufzutragen ist. Dieses Wechselfeld läßt sich durch einen „pulsierenden Zeiger $\mathfrak{A}(t)$ “ entsprechend Gl. (11) darstellen, wenn man unter \mathfrak{A}_0 den Zeiger des ruhenden Sinusfeldes versteht.

Läßt man ein $2p$ -poliges Sinusfeld im positiven oder negativen Umdrehungssinn mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{\omega}{p}$ gleichförmig rotieren, so erhält man ein „gleichförmig rotierendes Sinusfeld“ oder „Kreisdrehfeld“, dargestellt durch den Ausdruck

$$H(\varphi, t) = a \cos(p\varphi - \alpha \mp \omega t), \quad (13)$$

⁶ Vgl. Bödefeld-Sequenz: a. a. O. S. 115, Abb. 189. — Die in der Abbildung eingezeichneten Winkelgrade geben an, welche Werte der Vektor im Laufe einer Periode (entsprechend einem Umlauf um 360°) annimmt. Dies entspricht der Darstellung durch Richtungsgerade und Zeiger.

⁷ Der Ausdruck „Dreher“ wird in der ebenen Vektorrechnung auch in einem anderen Sinn gebraucht. Man versteht darunter einen Versor, der, mit einem ebenen Vektor multipliziert, diesen um einen bestimmten Winkel dreht, ohne dessen Betrag zu ändern. Vgl. beispielsweise H. Kafka: Die ebene Vektorrechnung und ihre Anwendungen in der Wechselstromtechnik, Sammlung math.-phys. Lehrbücher, Bd. 22, S. 5, Leipzig-Berlin, 1926 oder A. Fraenkel: Theorie der Wechselströme, 3. Aufl., S. 26, Berlin, 1930.

wie man aus Abb. 1 unmittelbar ablesen kann. Das erste Maximum entspricht nämlich zur Zeit $t = 0$ dem Winkel $\frac{\alpha}{p}$; ersetzt man α durch $\alpha + \omega t$ [entsprechend dem oberen Vorzeichen in Gl. (13)], so bewegt sich das Maximum mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{\omega}{p}$ im positiven Umlaufsinn längs des Kreises. Kreisdrehfelder lassen sich somit durch Zeiger darstellen, die mit der p -fachen Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Sinusfeldes umlaufen. Selbstverständlich haben auch diese umlaufenden Zeiger mit der kinematischen Deutung der Zeigerdarstellung von Sinusschwingungen nichts zu tun.

Bei den folgenden Betrachtungen wollen wir nur von pulsierenden und rotierenden Vektoren sprechen und offen lassen, ob es sich tatsächlich um Vektoren oder um Zeiger handelt, die Sinusfelder darstellen. Für die praktische Anwendung ist letzteres wichtiger.

V. Darstellung pulsierender Vektoren durch Wirk- und Blindvektoren und rotierende Vektoren.

Sind mehrere pulsierende Vektoren gleicher Richtung gegeben, fallen also ihre Richtungsgeraden zusammen, so erhält man den Zeiger der Summe dieser pulsierenden Vektoren als geometrische Summe der Zeiger der einzelnen pulsierenden Vektoren (s. Abb. 4). Da die Richtungen der pulsierenden Vektoren untereinander übereinstimmen, sind die Beträge der Vektoren algebraisch zu addieren und es kann nach Abschnitt I die Regel von der Addition skalarer Sinusfunktionen durch Bildung der geometrischen Summe der Zeiger angewendet werden.

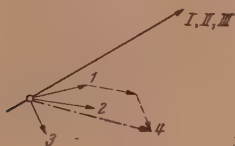


Abb. 4.

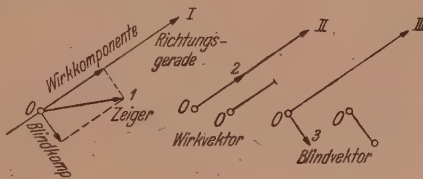


Abb. 5.

Unter Verwendung dieses Hilfssatzes können wir den Zeiger eines pulsierenden Vektors in zwei Komponenten zerlegen, wovon die eine in die Richtung der Richtungsgeraden fällt, die andere senkrecht dazu steht (s. Abb. 5). Der ersten Komponente entspricht ein pulsierender Vektor der Form $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0 \cos \omega t$, den wir als „Wirkvektor“, der zweiten ein solcher der Form $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \sin \omega t$, den wir als „Blindvektor“ bezeichnen wollen. Die entsprechenden Zeigerkomponenten seien Wirk- bzw. Blindkomponente des Zeigers genannt. In Abb. 5 sind Wirk- und Blindvektor herausgezeichnet. Es empfiehlt sich, Wirk- und Blindvektor nicht jedesmal durch Richtungsgerade und Zeiger darzustellen und wir wollen zur Vereinfachung die eingetragenen Bezeichnungen verwenden, und zwar gerichtete Strecken (mit dem Anfangspunkt O), die an Stelle der Pfeilspitze durch einen kurzen Querstrich bzw. einen kleinen Kreis gekennzeichnet sind. Der Wirkvektor entspricht nach Betrag und Richtung dem Vektor \mathfrak{U}_0 , der Blindvektor dem um $\frac{\pi}{2}$ zurückgedrehten Vektor \mathfrak{B}_0 . Man erkennt, daß die Summe mehrerer Wirkvektoren ein Wirkvektor ist, der sich als geometrische Summe der einzelnen Wirkvektoren ergibt. Das Entsprechende gilt für die Summe mehrerer Blindvektoren.

Wir können nunmehr beliebige pulsierende Vektoren zusammensetzen, indem wir sie jeweils in Wirk- und Blindvektoren zerlegen und die geometrischen Summen bilden. Das Ergebnis ist je ein resultierender Wirk- und Blindvektor, die im allgemeinen nicht senkrecht aufeinander stehen und daher zu keinem pulsierenden Vektor zusammengesetzt werden können. Wir werden später sehen, daß dieses allgemeinere Gebilde ein elliptisches Drehfeld darstellt.

Wir können einen pulsierenden Vektor auch durch die Summe aus einem Plus- und einem Minusdreher darstellen (s. Abb. 6). Der Plusdreher entspricht dem halben Zeiger, der Minusdreher ist dazu symmetrisch in bezug auf die Richtungsgerade. Diese Beziehung folgt unmittelbar aus der kinematischen Deutung der Zeigerdarstellung und der Bildung der Momentanwerte von Plus-

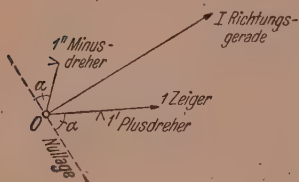


Abb. 6.

bzw. Minusdrehern nach Abb. 3. Sind mehrere pulsierende Vektoren gegeben, so kann ihre Summe nunmehr auch dadurch gebildet werden, daß man jeden einzelnen in einen Plus- und Minusdreher zerlegt und diese zu einem resultierenden Plus- und einem resultierenden Minusdreher zusammensetzt. Im allgemeinen werden diese ungleiche Beträge haben, lassen sich also nicht — wie dies auch nach dem früher Gesagten zu erwarten ist — zu einem resul-

tierenden pulsierenden Vektor zusammensetzen, sondern ergeben ein elliptisches Drehfeld. Dieses ist also einerseits durch je einen Wirk- und Blindvektor, die nicht aufeinander senkrecht stehen, anderseits durch je einen Plus- und Minusdreher von ungleichem Betrag darstellbar.

VI. Zusammenhang zwischen Wirk- und Blindvektoren und Plus- und Minusdrehern.

Wir fragen zunächst nach der Bedeutung der Summe aus je einem Wirk- und Blindvektor von gleicher Richtung und Betrag. In unserer abgekürzten Darstellung nach Abb. 5 ergibt dies ein notenkopftartiges Gebilde (s. Abb. 7a). Wir zeichnen nun ent-

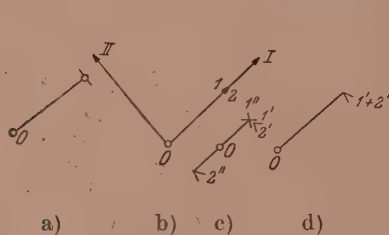


Abb. 7.

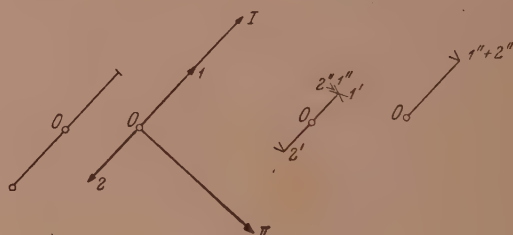


Abb. 8.

sprechend Abb. 7b die Richtungsgeraden I und II sowie die hier zusammenfallenden Zeiger 1 und 2 von Wirk- und Blindvektor. Nach Abb. 6 ersetzen wir (s. Abb. 7c) den Wirkvektor durch den Plusdreher $1'$ und den Minusdreher $1''$, deren Richtung

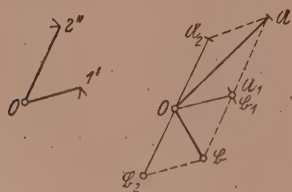


Abb. 9.

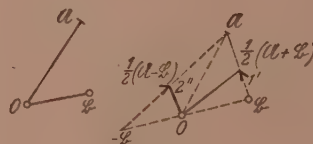


Abb. 10.

mit 1 übereinstimmt und deren Betrag halb so groß als der des Zeigers 1 ist. Der Blindvektor wird durch die Plus- und Minusdreher $2'$ und $2''$ ersetzt. Die Minusdreher $1''$ und $2''$ sind gleich groß und entgegengesetzt gerichtet, heben sich also auf, die beiden Plusdreher $1'$ und $2'$ geben zusammen einen Plusdreher (s. Abb. 7d), der mit dem ursprünglich gegebenen Wirk- bzw. Blindvektor gleiche Richtung und gleichen Betrag besitzt. Die Summe aus je einem Wirk- und Blindvektor von gleicher

Richtung und Betrag nach Abb. 7a ist also einem Plusdreher von gleicher Richtung und Betrag nach Abb. 7d gleichwertig.

Abb. 8 zeigt die entsprechende Zusammensetzung entgegengesetzt gleicher Wirk- und Blindvektoren, die einen Minusdreher ergeben, der mit dem Wirkvektor in Richtung und Betrag übereinstimmt. Wir können nun ein elliptisches Drehfeld, dargestellt durch einen Plusdreher und einen Minusdreher von verschiedenen Beträgen durch einen Wirk- und einen Blindvektor wie folgt ersetzen (s. Abb. 9). Dem Plusdreher 1' entsprechen der Wirkvektor \mathfrak{A}_1 und der Blindvektor \mathfrak{B}_1 von gleicher Richtung und Betrag. Dem Minusdreher 2'' der Wirkvektor \mathfrak{A}_2 und der entgegengesetzt gleiche Blindvektor \mathfrak{B}_2 . Es resultiert also ein Wirkvektor \mathfrak{A} , der der geometrischen Summe aus Plus- und Minusdreher entspricht, und ein Blindvektor \mathfrak{B} , entsprechend der geometrischen Differenz aus Plusdreher 1' und Minusdreher 2''.

Demgemäß muß bei vorgegebenem Wirkvektor \mathfrak{A} und Blindvektor \mathfrak{B} der entsprechende Plusdreher durch die halbe geometrische Summe, der Minusdreher durch die halbe geometrische Differenz von Wirkvektor \mathfrak{A} und Blindvektor \mathfrak{B} gegeben sein (s. Abb. 10). Da sich in dem Summen- bzw. Differenzenparallelogramm die beiden Diagonalen halbieren, so kann man bei vorgegebenem Wirkvektor \mathfrak{A} und Blindvektor \mathfrak{B} den äquivalenten Plusdreher 1' am einfachsten so finden, daß man die Endpunkte von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} verbindet und den Halbierungspunkt aufsucht, während der äquivalente Minusdreher 2'' durch den Halbierungspunkt von \mathfrak{A} und $-\mathfrak{B}$ gegeben ist.

VII. Das elliptische Drehfeld.

Wir haben bisher vorweggenommen, daß durch je ein Paar Plus- und Minusdreher bzw. Wirk- und Blindvektoren ein elliptisches Drehfeld bestimmt ist. Wir wollen nunmehr darauf näher eingehen. Man nimmt an, es wäre ein Plusdreher 1' und ein Minusdreher 2'' gegeben, so stellen diese definitionsgemäß die momentanen Lagen der durch sie symbolisierten gleichförmig rotierenden Vektoren zur Zeit $t = 0$ dar. Bezeichnen wir den Winkel, von der Richtung des Plusdrehers im positiven Sinne bis zu der des Minusdrehers gemessen, mit 2α , so werden die Richtungen der beiden Vektoren zur Zeit $t = \frac{\alpha}{\omega}$ übereinstimmen.

Wir wollen der Einfachheit halber die Zeit von diesem Augenblick an zählen und mit \bar{t} bezeichnen. Dann erhalten wir für die geometrische Summe der Momentanwerte der beiden gegenläufigen Vektoren, die wir den resultierenden Vektor des elliptischen Drehfeldes nennen wollen, wie Abb. 11 zeigt. Zur Zeit $t = 0$ ergibt die geometrische Summe von $\overline{OA} = a$ und $\overline{OB} = b$ die gerichtete Strecke $\overline{OC} = a + b$. Zu irgendeiner Zeit \bar{t} seien die Momentanwerte der beiden gegenläufig rotierenden Vektoren \overline{OD} bzw. \overline{OE} , ihre geometrische Summe bestimmt den Punkt F . Dieser hat die Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} x &= (a + b) \cos \omega \bar{t}, \\ y &= (a - b) \sin \omega \bar{t}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

wenn wir in die Richtung von OC die x -Achse eines ebenen Koordinatensystems legen. Wir erhalten als Gleichung der Bahnkurve, welche die Spitze des resultierenden Vektors beschreibt:

$$\left(\frac{x}{a + b} \right)^2 + \left(\frac{y}{a - b} \right)^2 = 1.$$

D. i. die Gleichung einer Ellipse mit den Achsen $a + b$ und $a - b$. Daher der Name „elliptisches Drehfeld“.

Man kann nun die Bewegung des resultierenden Vektors in einfacher Weise vollständig beschreiben. Wir denken uns eine x - η -Ebene, die mit der x - y -Ebene die x -Achse gemeinsam hat und deren η -Achse gegen die y -Achse um den Winkel ψ geneigt ist, so daß $\cos \psi = \frac{a + b}{a - b}$ ist.

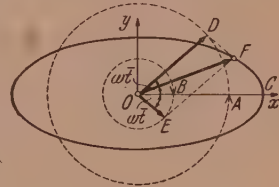


Abb. 11.

Bewegt sich ein Punkt gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis mit dem Radius $a + b$ in der $x\eta$ -Ebene, so sind seine Koordinaten

$$x = (a + b) \cos \omega \bar{t},$$

$$\eta = (a + b) \sin \omega \bar{t}.$$

Durch Projektion auf die $x\eta$ -Ebene erhält man für die Koordinaten x und y die Werte nach Gl. (14). Die Bewegung des resultierenden Vektors des elliptischen Drehfeldes kann man also durch Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung auf eine schräge Ebene darstellen.

Bei einer solchen gleichförmigen Kreisbewegung stehen Radien, die zu Zeitpunkten gehören, deren Differenz einer Viertelperiode entspricht, aufeinander senkrecht, d. h., die zu einem Punkt gehörige Kreistangente ist jeweils zu dem anderen Kreisradius parallel. Daraus folgt, daß Vektoren, deren zugehörige Zeitdifferenz einer Viertelperiode entspricht, konjugierte Durchmesser der Ellipse darstellen.

VIII. Anwendungsbeispiele.

An einer Reihe von Beispielen soll gezeigt werden, daß die eingeführten Hilfsmittel tatsächlich eine einfache und anschauliche Behandlung hierher gehöriger Aufgaben ermöglichen.

1. Zerlegung eines elliptischen Drehfeldes in ein Wechsel- und Kreisdrehfeld.

Die Aufgabe ist nicht eindeutig bestimmt.⁸ Wir können beispielsweise die Richtungsgerade des pulsierenden Vektors vorschreiben und fordern, daß der resultierende

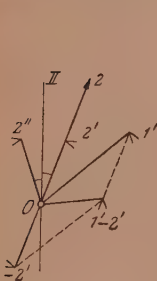


Abb. 12.

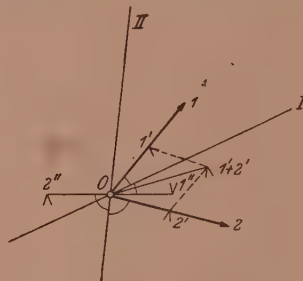


Abb. 13.

Dreher ein Plusdreher ist. Das elliptische Drehfeld sei durch den Plusdreher 1' und den Minusdreher 2'' gegeben, die angenommene Richtungsgerade sei II (s. Abb. 12). Dann ist der auf II symmetrische Plusdreher 2' zur Ergänzung von 2'' auf das gesuchte Wechselfeld notwendig, der Plusdreher — 2' ergibt mit 1' den gesuchten Plusdreher 1'—2', der gesuchte Zeiger entspricht der Größe und Richtung nach dem doppelten Plusdreher 2'.

2. Zusammensetzung zweier Wechselfelder zu einem Kreisdrehfeld.

Das erste Wechselfeld sei durch die Richtungsgerade I und den Zeiger 1 gegeben, vom zweiten Wechselfeld kann beispielsweise die Richtungsgerade II angenommen werden (s. Abb. 13). Wir stellen in bekannter Weise den pulsierenden Vektor mit dem Zeiger 1 durch die beiden gegenläufigen Dreher 1' und 1'' dar. Verlangen wir ein resultierendes Kreisdrehfeld mit positivem Umlaufsinn, so müssen wir 1'' durch 2'' zum Verschwinden bringen. Damit ist auch 2' symmetrisch zu II bestimmt und schließlich entspricht der Zeiger 2 der Größe und Richtung nach dem doppelten Plusdreher 2'. Damit ist bereits das Wechselfeld mit der Richtungsgeraden II eindeutig bestimmt. Das resultierende Kreisdrehfeld wurde durch die geometrische Summe der Plusdreher 1' und 2' dargestellt. Von besonderer Wichtigkeit sind die Fälle, in denen die Richtungsgeraden I und II aufeinander senkrecht stehen. Abb. 14 entspricht der in Abb. 13 behandelten Aufgabe und man erkennt, daß die Zeiger 1 und 2 und der resultierende Plusdreher 1' + 2' der Größe und Richtung nach zusammenfallen.

⁸ Vgl. Bödefeld-Sequenz: A. a. O., S. 120, wo ein spezieller Fall behandelt wird.

Abb. 15 zeigt den Fall eines resultierenden Kreisfeldes mit negativem Umlaufsinne. Der Zeiger 2 ist nunmehr entgegengesetzt gleich dem Zeiger 1, der resultierende Minusdreher $1'' + 2''$ liegt symmetrisch zu 1 in bezug auf die Richtungsgerade I .

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß es zur rechnerischen Behandlung von Mehrphasensystemen vorteilhaft ist, von der Form $G(\varphi) = a \cos(\omega t - \alpha)$ der Schwingungsgleichung auszugehen, da dann der Winkel α von der Richtungsgeraden aus zu zählen ist.

Bei dem in Abb. 14 dargestellten Fall besitzt die erste Schwingung einen positiven zeitlichen Phasenwinkel α , der Phasenwinkel β der zweiten Schwingung ist $\frac{\pi}{2} - \alpha$ nacheilend oder $\alpha - \frac{\pi}{2}$ voreilend. Die Ausgangslage des resultierenden, im positiven Sinne umlaufenden Kreisdrehfeldes ist $+\alpha$ von der Richtungsgeraden I ausgezählt. In Abb. 15 ist der erste Phasenwinkel wieder mit α voreilend angenommen, der zweite Phasenwinkel ergibt sich hier mit $\alpha + \frac{\pi}{2}$ voreilend. Die Ausgangslage des resultierenden, im negativen Sinne umlaufenden Kreisdrehfeldes ist nunmehr durch den Winkel $-\alpha$ bestimmt.

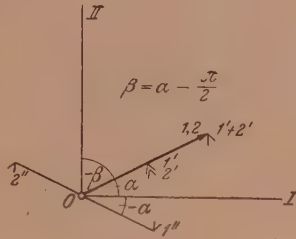


Abb. 14.

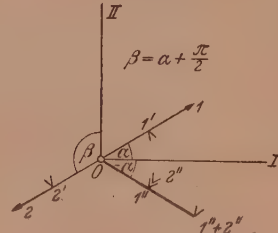


Abb. 15.

3. Zusammensetzung beliebig vieler Wechselfelder zu einem Kreisdrehfeld.

Sind $(n - 1)$ Wechselfelder durch ihre Richtungsgeraden und Zeiger vorgegeben, so kann man von einem n -ten Wechselfeld die Richtungsgerade ebenfalls willkürlich annehmen und den zugehörigen Zeiger so bestimmen, daß ein Kreisdrehfeld mit vorgegebenem Umlaufssinn resultiert. In Abb. 16 stellen a' und b'' Plus- und Minusdreher dar, die sich durch Zusammensetzung der $n - 1$ vorgegebenen Wechselfelder ergeben. I sei die Richtungsgerade des n -ten Wechselfeldes. Soll beispielsweise a' verschwinden, also ein Kreisdrehfeld mit negativem Umlaufssinn resultieren, so muß $1'$ entgegengesetzt gleich a' gemacht werden. Der Minusdreher $1''$ ergibt sich symmetrisch zu I und das resultierende, im negativen Sinne umlaufende Kreisdrehfeld ist durch $b'' + 1''$ dargestellt. Der gesuchte Zeiger 1 entspricht der Größe und Richtung nach dem doppelten Plusdreher $1'$.

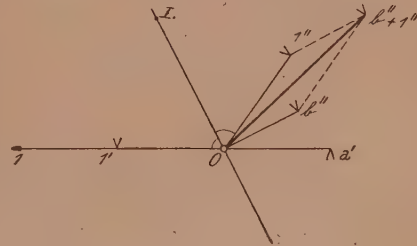


Abb. 16.

Die n Richtungsgeraden sind in den meisten praktischen Fällen symmetrisch angeordnet, für das Verschwinden des gegenläufigen Kreisdrehfeldes ist es aber auch dann nicht nötig, daß die Phasenwinkel der zugehörigen Zeiger irgendwelchen Symmetriebedingungen genügen. Wir haben gesehen, daß $n - 1$ davon willkürlich gewählt werden können und daß die n -te Schwingung nach obiger Methode so bestimmt werden kann, daß ein positiv oder negativ umlaufendes Kreisdrehfeld resultiert. Es ist daher unrichtig, wenn vielfach behauptet wird, daß bei symmetrischen Wicklungen die zeitliche Phasenverschiebung der Ströme gleich der räumlichen Versetzung (im elektrischen Winkelmaß ausgedrückt) der Spulen am Ankerumfang sein muß, damit ein Kreisdrehfeld entsteht. Diese Bedingung ist hinreichend, aber nicht notwendig.

4. Symmetrische Dreiphasensysteme.

Die symmetrischen Dreiphasensysteme besitzen so große praktische Bedeutung, daß auf sie noch etwas näher eingegangen werden soll. In Abb. 17 sind die drei symmetrischen Richtungsgeraden *I*, *II* und *III* eingezeichnet und der Zeiger 1 mit der positiven Phasenverschiebung eingetragen. Wir zerlegen das erste Wechselfeld in die gegenläufigen Kreisdrehfelder mit den Drehern 1' und 1''. Wollen wir die im negativen Sinne umlaufenden Kreisdrehfelder zum Verschwinden bringen, so kann dies durch Hinzufügen der symmetrisch liegenden Minusdreher 2'' und 3'' zu 1'' geschehen. Man muß dabei beachten, daß die Bezeichnung der Minusdreher in umgekehrter Reihenfolge wie die Aufeinanderfolge der Richtungsgeraden *I*, *II* und *III*

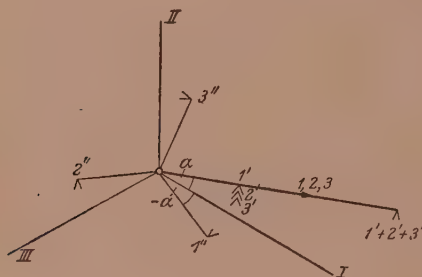


Abb. 17.

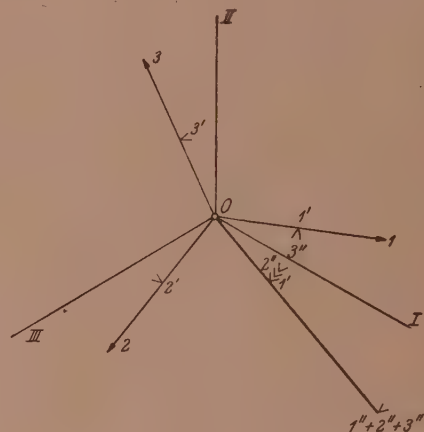


Abb. 18.

erfolgt, da sich sonst drei gleichphasige, symmetrische Wechselfelder ergeben, deren geometrische Summe identisch Null ist. Wir bezeichnen also die Minusdreher 2'' und 3'' in der in Abb. 17 angegebenen Reihenfolge und erhalten durch Spiegelung an den Richtungsgeraden *II* und *III* die Plusdreher 2' und 3' und damit auch die Zeiger 2 und 3. Man erkennt, daß die Plusdreher 1', 2' und 3' zusammenfallen und man erhält den resultierenden Plusdreher $1' + 2' + 3'$ mit dem $\frac{3}{2}$ -fachen Betrag und einer durch den Winkel α bestimmten Ausgangslage. Die drei Zeiger 1, 2 und 3 fallen ebenfalls zusammen und es sind ihre zeitlichen Phasenlagen (jeweils voreilend als positiv anzugeben): α , $\alpha - \frac{2\pi}{3}$ und $\alpha - \frac{4\pi}{3}$.

Will man ein im negativen Sinne umlaufendes Kreisdrehfeld erhalten, so müssen die Plusdreher zum Verschwinden gebracht werden. 1' ist durch die angenommene Phasenlage von 1 bestimmt, 2' und 3' werden wieder symmetrisch angenommen (s. Abb. 18). Die Zeiger fallen diesmal nicht zusammen, sondern liegen symmetrisch, aber in entgegengesetzter Reihenfolge wie die Richtungsgeraden, da sonst die geometrische Summe der Wechselfelder, wie früher erwähnt, verschwinden würde. Für die zeitlichen Phasenlagen der drei Wechselfelder erhält man: α , $\alpha + \frac{2\pi}{3}$ und $\alpha + \frac{4\pi}{3}$. Der resultierende Minusdreher hat wieder den $\frac{3}{2}$ -fachen Betrag, die Ausgangslage ist diesmal durch $-\alpha$ bestimmt. Die Verallgemeinerung auf symmetrische *n*-Phasensysteme ist naheliegend.

Schließlich sei nochmals darauf hingewiesen, daß beim Ersatz von Sinusfeldern durch Zeiger (ausführlich mit „Feldzeiger“ im Gegensatz zu „Schwingsungszeiger“ zu bezeichnen) es offen gelassen ist, wie groß die Polzahlen der Sinusfelder sind, die abgeleiteten Beziehungen sind für beliebige Polzahlen gültig. In den Zeigerdiagrammen nach Abb. 12 bis 18 entsprechen die Richtungsgeraden *I*, *II* und *III* den Richtungen von Zeigern 2 *p*-poliger Sinusfelder, es sind also nach Abb. 1b die Winkel, die die

Richtungsgeraden mit einer festen Nullage einschließen, durch die Polpaarzahl zu dividieren, um jeweils die Lage des ersten Maximums des Sinusfeldes zu erhalten. Die Beträge der (Schwingungs-) Zeiger 1, 2 und 3 sind für die Größe der maximalen Schwingungsamplituden maßgebend, die Winkel zwischen den (Schwingungs-) Zeigern und Richtungsgeraden geben die zeitlichen Phasenlagen an, haben also selbstverständlich mit der räumlichen Lage nichts zu tun.

5. Konstruktion einer Ellipse aus konjugierten Durchmessern.

Es seien zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse entsprechend den Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} gegeben (s. Abb. 19) und es sollen Größe und Richtung der Halbachsen dieser Ellipse bestimmt werden. Nach der Bemerkung am Ende des Abschnittes VII können wir \mathfrak{A} und \mathfrak{B} als Momentanwerte des resultierenden Vektors eines elliptischen Drehfeldes auffassen, die zu zwei Zeitpunkten mit einer Viertelperiode Differenz gehören. Läßt man \mathfrak{A} einem Wirkvektor entsprechen, so muß \mathfrak{B} um $\frac{\pi}{2}$ zurückgedreht werden, um den zugehörigen Blindvektor \mathfrak{B} zu erhalten. Nach Abb. 10 ergeben sich der Plusdreher $1'$ und der Minusdreher $2''$ aus den Halbierungspunkten der durch die Endpunkte von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{A} und $-\mathfrak{B}$ bestimmten Strecken. Durch Halbieren des Winkels zwischen $1'$ und $2''$ ergibt sich die Richtung der großen Hauptachse, deren Länge als Summe der Beträge der Dreher $1'$ und $2''$, während die Länge der kleinen Hauptachse durch die Differenz der Beträge von $1'$ und $2''$ gegeben ist (vgl. Abschnitt VII). Damit ist die Aufgabe in einfachster Weise gelöst.

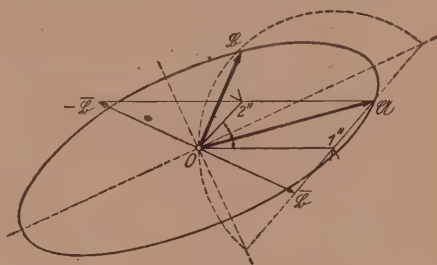


Abb. 19.

IX. Zusammenfassung.

Ebene Vektoren konstanter Richtung, deren Beträge zeitlich sinusförmig veränderlich sind („pulsierende Vektoren“) und gleichförmig rotierende Vektoren ergeben in beliebiger Zusammensetzung elliptische Drehfelder. Es können an Stelle der Vektoren auch sinngemäß die Zeiger 2 p -poliger Sinusfelder betrachtet werden, was zu den Begriffen des Wechselfeldes und des Kreisdrehfeldes führt. Eine zweckmäßige Darstellung erfolgt durch Richtungsgerade und Zeiger, sowie durch Plus- und Minusdreher. Ferner wird die Zerlegung pulsierender Vektoren in Wirk- und Blindvektoren eingeführt und es wird der einfache Zusammenhang zwischen der Darstellung eines elliptischen Drehfeldes einerseits durch Wirk- und Blindvektoren, andererseits durch Plus- und Minusdreher abgeleitet. Schließlich wird eine Reihe von elliptischen Drehfeldern vorgeführt, die dank der Einfachheit der entwickelten Regeln in weitgehender Allgemeinheit überblickt werden können.

(Eingegangen am 10. Oktober 1946.)

Der Culmannsche und der Mohrsche Kreis.

Von F. Jung, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

Die reduzierte Spannung $\bar{\varrho}$ in einem Punkt O eines elastischen Körpers ist ein Vektor, der bestimmt ist für jede Stellung eines durch O gelegten Flächenelementes durch den Spannungstensor (symmetrischen Affinor) $\bar{\varrho}$. Ist \bar{e} der Einheitsvektor normal zu dem Flächenelement, so ist

$$\bar{\varrho} = \bar{e} | \bar{\varrho},$$

wo der Vertikalstrich das Grassmannsche Zeichen für das Innenprodukt ist. Ebenso ist die spezifische Verzerrung für die durch \bar{e} gegebene Richtung bestimmt durch den Verzerrungstensor, der Impulsmomentvektor (Schwungmomentvektor) für eine durch O gelegte Drehachse von der Richtung \bar{e} durch den Trägheitstensor. Allgemein ist

$$\bar{a} = \bar{e} | \bar{a},$$

$$\bar{a} = \sum a_{ik} \bar{e}_i, \bar{e}_k, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad a_{ii} = a_{ki},$$

wo \bar{e}_i, \bar{e}_k das Allgemeinprodukt bedeutet und $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ drei zueinander normale Einheitsvektoren. Beim Spannungstensor ist \bar{a} die Spannung, $a_{ii} = \sigma_i$ die Normalspannung, $a_{ik} = \tau_{ik}$ die Schubspannung, beim Verzerrungstensor ist \bar{a} die Verzerrung, $a_{ii} = \epsilon_i$ die Dehnung, $a_{ik} = \gamma_{ik}$ die Gleitung, beim Trägheitstensor ist \bar{a} der Impulsmomentvektor für die Winkelgeschwindigkeitseinheit, $a_{ii} = J_i$ das Trägheitsmoment, $a_{ik} = J_{ik}$ das Deviationsmoment. Da in all diesen Fällen gleichartige Abhängigkeiten vorliegen, eignen sich für ihre graphische Behandlung auch gleiche Verfahrungsweisen, besonders also die Benützung der sog. Mohrschen Kreise, worauf ich schon vor vielen Jahren hingewiesen habe.¹

Ich sage die sog. Mohrschen Kreise, weil der eine davon gar nicht zuerst von Mohr angegeben wurde, sondern von Culmann in seinem grundlegenden Werk „Die graphische Statik“,² was Mohr wohl kaum unbekannt sein konnte, trotzdem er es in der betreffenden Abhandlung³ nicht erwähnt. Allerdings hat er diese Darstellung bedeutend ausgebaut, so daß man mit Recht von einem Culmann-Mohrschen Kreis sprechen sollte. Andererseits wird der von Mohr tatsächlich zuerst angegebene Kreis⁴ häufig als Mohr-Landscher Kreis bezeichnet oder ganz unzutreffenderweise nur als Landscher Kreis, obzwar Land ausdrücklich von der betreffenden Abhandlung Mohrs ausgeht und keine wesentliche Erweiterung gibt.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, mögen im folgenden die Ausführungen an den Spannungstensor geknüpft werden. Gibt man dem Stellungsvektor \bar{e} im Punkt O alle möglichen Richtungen, so liegen die Endpunkte der zugehörigen Spannungsvektoren $\bar{\varrho}$ auf dem Laméschen Spannungsellipsoid. In jeder der drei Hauptebenen fallen die einander entsprechenden Vektoren \bar{e} und $\bar{\varrho}$ beide in diese Ebene. Einfach erhält man zu \bar{e} das zugehörige $\bar{\varrho}$, indem man die Spannungsellipse dieser Ebene auffaßt als affine Abbildung der beiden konzentrischen Kreise über den Ellipsenhauptachsen als Durchmesser entsprechend einer bekannten Ellipsenkonstruktion. Abbildungen dieser Laméschen Spannungsellipse sind nun sowohl

¹ Zusammenhang verschiedener Abbildungen der elastischen Spannungsverteilung. Techn. Bl., Prag 35 (1904).

² 1. Aufl. 1866, 2. Aufl. 1875.

³ Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körper-elementes. Zivilingenieur, 1882.

⁴ Graphische Darstellung zugeordneter Spannungs- und Verzerrungszustände. Ingenieur-Arch. 4 (1933).

der Culmannsche als auch der Mohrsche Kreis. Die übliche Darstellung dieser Beziehungen erfolgt auf rechnerischem Wege und läßt den recht einfachen anschaulichen Zusammenhang gar nicht hervortreten. Für den Culmannschen Kreis habe ich ihn schon in der oben erwähnten Arbeit gezeigt, die natürlich ganz unbeachtet geblieben ist.

Die zur Stellung \bar{e} gehörige Gesamtspannung $\bar{\rho}$ sei dargestellt als Vektorsumme der Normalspannung $\bar{\sigma}$ und der Schubspannung $\bar{\tau}$

$$\bar{\rho} = \bar{\sigma} + \bar{\tau}.$$

\bar{e}_I und \bar{e}_{II} seien die Richtungen der Hauptspannungen. Abb. 1 entspricht der Voraussetzung, daß nur Normalspannungen von gleichem Vorzeichen auftreten, Abb. 2 der Annahme, daß die Normalspannungen ungleiche Vorzeichen haben können. Nun werde der Stellungsvektor \bar{e} samt dem zugehörigen Spannungsdreieck $\rho \sigma \tau$ in die Richtung \bar{e}_{II} gedreht, wodurch das Spannungsdreieck in die Lage $\rho' \sigma' \tau'$ kommt.

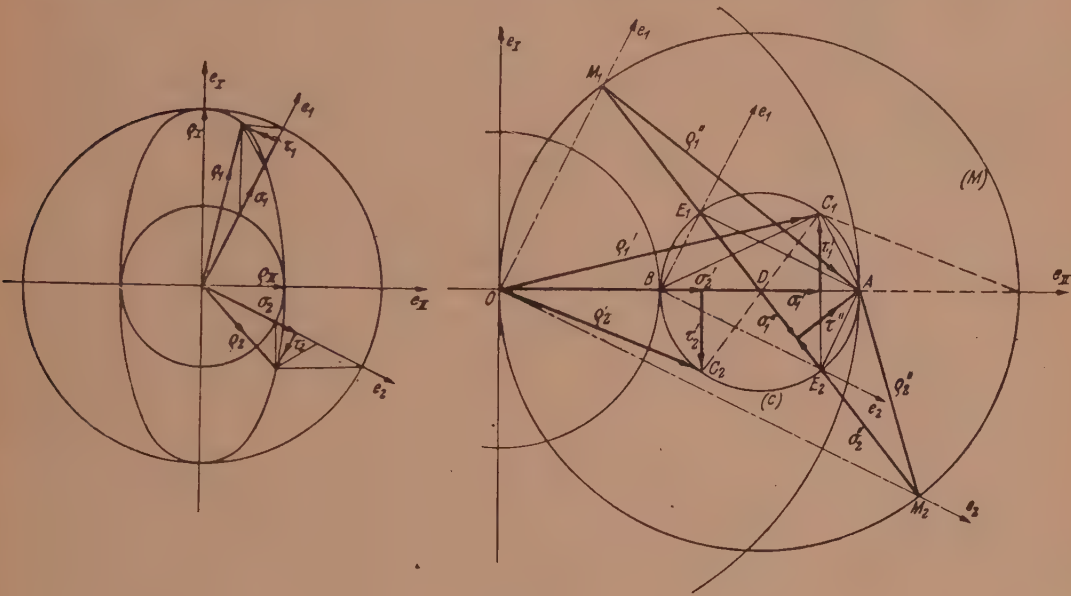


Abb. 1.

Dann liegen die Endpunkte C der Vektoren $\bar{\rho}'$ offenbar auf einem Kreis (C) , dessen Durchmesser gleich ist der Differenz (Abb. 1), bzw. Summe (Abb. 2) der Halbachsen der Spannungsellipse. Dies ist der Culmannsche Spannungskreis, die Abszissen seiner Punkte stellen die Normalspannungen dar, die Ordinaten die Schubspannungen. Die zu ρ_1' gehörige Stellung e_1 wird gefunden, indem man den Kreis (C) mit der Geraden τ_2' in E_1 schneidet und diesen Punkt mit B verbindet. Den drei Hauptspannungsebenen entsprechend erhält man drei Culmannsche Kreise, deren weitere Verwendung dann Mohr gezeigt hat.

Zwei zueinander normalen Stellungsvektoren \bar{e}_1, \bar{e}_2 entsprechen in der Spannungsellipse die konjugierten Spannungen $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$. Zu ihnen gehören in der Culmannschen Abbildung die Vektoren $\bar{\rho}_1', \bar{\rho}_2'$, deren Endpunkte C auf einem Durchmesser des Kreises (C) liegen. Nun dreht man das Dreieck OCD um den Mittelpunkt D des Culmannschen Kreises so weit, daß die Punkte C sämtlich nach A fallen. Die Strecken τ_1', τ_2' kommen dann zur Deckung in τ'' , während σ_1' und σ_2' in eine Gerade fallen von der Länge $\sigma_1' + \sigma_2'$ (Abb. 1) bzw. $\sigma_1' - \sigma_2'$ (Abb. 2) mit D als Halbierungspunkt, wie sich unmittelbar aus der Anschauung ergibt. Die aus O durch die Drehung

hervorgehenden Punkte M liegen ersichtlich auf einem mit (C) konzentrischen Kreis (M) , dessen Durchmesser gleich ist der Summe bzw. Differenz der Hauptspannungen ϱ_I, ϱ_{II} . Das ist der Mohrsche Kreis. Der Durchmesser $M_1 M_2$ fällt, wie man sieht, mit $E_1 E_2$ zusammen, so daß die Geraden

$$OM_1 \parallel BE_1 \parallel e_1 \text{ und } OM_2 \parallel BE_2 \parallel e_2$$

die zu ϱ_1'' und ϱ_2'' gehörenden Stellungsvektoren geben, wie es ja beim Mohrschen Kreis zutrifft.

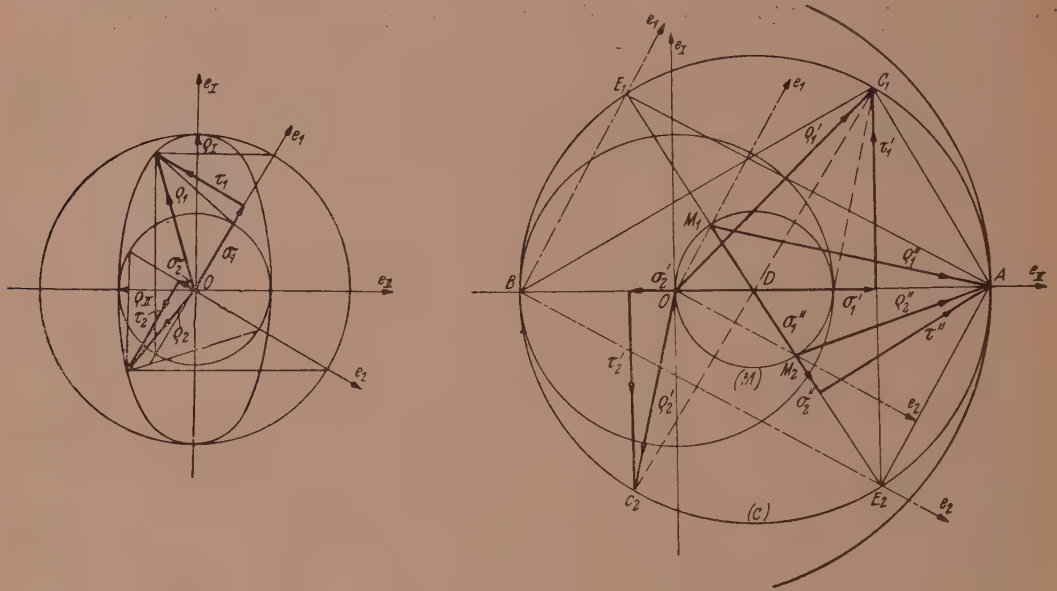


Abb. 2.

Mohr hat den Kreis (M) eingeführt nur für den Fall gleichartiger Normalspannungen. Daß die Konstruktion auch anwendbar ist bei ungleichartigen Normalspannungen, hat Herr Klotter gezeigt.⁴ Bei der eben vorgeführten Ableitung ist dazu keine gesonderte Betrachtung nötig. Auf dem hier eingeschlagenen Wege lassen sich in anschaulicher Weise auch die Ergebnisse ableiten, die Herr Klotter gefunden hat bezüglich der Culmann-Mohrschen Abbildung zweier zugeordneter Tensoren, doch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

(Eingegangen am 5. November 1946.)

Zur graphischen Integration linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Von R. Inzinger, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

In der vorliegenden Note soll gezeigt werden, daß die Beziehungen, die zwischen einer Kurve und ihren Evolventoiden bestehen, mit Vorteil zur graphischen Integration von linearen Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten verwertet werden können.

Es sei¹ P ein Punkt der orientierten Kurve k , t der Tangentialvektor von k in P und t_1 jener durch P gehende Vektor, der mit t den Winkel α einschließt. Bewegt

¹ Vgl. Abb. 1 auf S. 417.

sich nun P auf k , dann umhüllen für festes α die Speere $t_{1\alpha}$ eine orientierte Kurve $k_{1\alpha}$, die man als die α -Evolutoide von k bezeichnet. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich als Sonderfall die Evolute k_1 von k , während die Kurve k selbst als ihre eigene Nullevolutoide aufgefaßt werden kann.

Geht man dagegen von der Kurve $k_{1\alpha}$ aus, dann ist die Kurve k als eine α -Evolventoide von $k_{1\alpha}$ zu bezeichnen. Als Sonderfälle der Evolventoiden einer Kurve $k_{1\alpha}$ ergeben sich dann für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ die Evolventen von $k_{1\alpha}$, während die Kurve $k_{1\alpha}$ selbst wieder als ihre eigene Nullevolventoide betrachtet werden kann.

Zu einer Kurve k gehört für jeden Wert von α eine α -Evolutoide $k_{1\alpha}$. Dagegen bilden die zur Kurve $k_{1\alpha}$ gehörigen α -Evolventoiden eine einparametrische Kurvenschar. Ist daher $k_{1\alpha}$ gegeben, dann erfordert die Bestimmung der α -Evolventoiden von $k_{1\alpha}$ die Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung, die bei geeigneter Wahl der Koordinaten linear wird und konstante Koeffizienten besitzt. Die Funktion, durch die $k_{1\alpha}$ bestimmt ist, erweist sich sodann als die Störungsfunktion dieser Differentialgleichung.

Die α -Evolventoiden k der Kurve $k_{1\alpha}$ schneiden sämtliche Tangentialspeere von $k_{1\alpha}$ unter dem festen Winkel α . Da sich diese Beziehung leicht konstruktiv erfassen läßt, so ergibt sich demnach daraus ein sehr einfaches Verfahren zur graphischen Integration von linearen inhomogenen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, über das im folgenden berichtet wird. Die mehrmalige Anwendung dieses Verfahrens gestattet sodann auch die graphische Integration von Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung.

Die Evolutoiden- und Evolventoidenbildung ist in der Theorie der ebenen Kurven seit langem wohlbekannt,² doch scheint der Vorteil, mit dem die Evolventoidenbildung zur graphischen Integration von Differentialgleichungen verwendet werden kann, bisher nicht beachtet worden zu sein.

E. Meissner hat darauf hingewiesen, daß es für die graphische Integration von Differentialgleichungen häufig zweckmäßig ist, die auftretenden Kurven als Hüllgebilde ihrer orientierten Tangenten zu betrachten.³ Dies ist insbesondere dann vorteilhaft, wenn man zur Festlegung der Tangentialspeere in der Ebene deren Polarkoordinaten h, φ verwendet. Es bedeutet also h den vorzeichenbegabten Abstand der Speere vom Koordinatenursprung O und φ den modulo 2π bestimmten Winkel derselben gegen eine feste Nullrichtung o . Eine orientierte Kurve k ist dann in diesen Koordinaten durch ihre sog. Stützfunktion $h = h(\varphi)$ festgelegt. Die Kurve k bezeichnet E. Meissner als das Linienbild der Stützfunktion $h = h(\varphi)$.

Der Vorteil dieser Koordinatenwahl für die graphische Integration von Differentialgleichungen besteht nun darin, daß dadurch der Differentiations- und Integrationsprozeß in überaus einfacher Weise konstruktiv beherrscht wird. Ist nämlich $h = h(\varphi)$ die Stützfunktion einer Kurve k , dann ist $h_1 = h'(\varphi)$ die Stützfunktion der Evolute k_1 von k und $h_n = h^{(n)}(\varphi)$ die Stützfunktion der n -ten Evolute k_n von k , die durch n -malige Evolutenbildung aus k gewonnen wird.

Es entspricht also bei Verwendung polarer Speerkoordinaten der Differentiation die Evolutenbildung und der Integration die Evolventenbildung.

² G. Loria: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, 2. Aufl., Bd. II, S. 261 ff. Leipzig u. Berlin. 1911.

³ E. Meissner: Graphische Analysis vermittle des Linienbildes einer Funktion. Schweiz. Bau-Ztg. 98, 287—290, 333—335 (1931); 99, 27—30, 41—44, 67—69 (1932).

Bedient man sich des Zeichens „ D “ für den Operator der Differentiation, dann gilt neben

$$h_n(\varphi) = h^{(n)}(\varphi) = D^n \cdot h(\varphi)$$

für die Evolutenbildung die symbolische Gleichung

$$k_n = D^n \cdot k. \quad (1)$$

Das von E. Meissner angegebene und als sog. Linienbildverfahren bekannt gewordene Integrationsverfahren wird vornehmlich zur graphischen Integration von Differentialgleichungen zweiter Ordnung angewendet. Es besteht im wesentlichen darin, daß die durch eine gegebene Differentialgleichung n -ter Ordnung festgelegte Beziehung zwischen der gesuchten Funktion und ihren ersten n Ableitungen vermöge der Gl. (1) als Beziehung zwischen einer Kurve k und ihren ersten n Evoluten gedeutet werden kann.

Das hier zur Darstellung gelangende Verfahren stellt insofern eine Verallgemeinerung des Meissnerschen Verfahrens dar, als es auf Differentialgleichungen von beliebig hoher Ordnung anwendbar ist.

Betrachtet man nun an Stelle der Evolutenbildung die α -Evolutoidenbildung, dann ist — wie im folgenden gezeigt werden wird — der Operator D durch den linearen Differentialoperator

$$D_{1\alpha} = \cos \alpha + D \sin \alpha \quad (2)$$

zu ersetzen, der für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ mit D identisch wird. Für die Stützfunktion $h_{1\alpha}(\varphi)$ der α -Evolutoiden $k_{1\alpha}$ von k gilt dann

$$h_{1\alpha}(\varphi) = D_{1\alpha} \cdot h(\varphi), \quad (3)$$

woraus für die α -Evolutoidenbildung die symbolische Gleichung

$$k_{1\alpha} = D_{1\alpha} \cdot k$$

folgt. Die mehrfache Evolutoidenbildung für gleiche oder verschiedene Winkel $\alpha, \beta, \dots, \nu$ führt sodann auf einen linearen Differentialoperator $D_{n\alpha, \beta, \dots, \nu}$ n -ter Ordnung, der sich als das Produkt

$$D_{n\alpha, \beta, \dots, \nu} = D_{1\alpha} \cdot D_{1\beta} \dots D_{1\nu} \quad (4)$$

von n gleichen oder verschiedenen Operatoren der Form (2) erweist. Aus (3) folgt nun für die Stützfunktion $h_{n\alpha, \beta, \dots, \nu}(\varphi)$ der n -ten Evolutoide $k_{n\alpha, \beta, \dots, \nu}$ von k

$$h_{n\alpha, \beta, \dots, \nu}(\varphi) = D_{n\alpha, \beta, \dots, \nu} \cdot h(\varphi), \quad (5)$$

während sich für die mehrfache Evolutoidenbildung an Stelle der Gl. (1) die symbolische Gleichung

$$k_{n\alpha, \beta, \dots, \nu} = D_{n\alpha, \beta, \dots, \nu} \cdot k$$

ergibt, die für $\alpha = \beta = \dots = \nu = \frac{\pi}{2}$ mit (1) identisch wird.

Aus der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Operatoren in (4) folgt die Vertauschbarkeit der zugehörigen Evolutoidenbildungen. Dieses Ergebnis wird als der Satz von Lancret bezeichnet.⁴ Es ist also z. B. die zweite α, β -Evolutoide $k_{2\alpha, \beta}$ einer Kurve k mit der zweiten β, α -Evolutoide $k_{2\beta, \alpha}$ von k identisch.

Ist ein beliebiger linearer Differentialoperator n -ter Ordnung D_n mit konstanten (reellen) Koeffizienten

$$D_n = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_n D^n \quad (6)$$

gegeben, dann kann dieser immer in eindeutiger Weise in der Form

$$D_n = c \cdot D_{1\alpha} \cdot D_{1\beta} \dots D_{1\nu} \quad (7)$$

dargestellt werden, wobei allerdings paarweise konjugiert komplexe Winkel auftreten können. Dagegen ist die Konstante c unter allen Umständen reell. Die Winkel $\alpha,$

⁴ Vgl. G. Loria: A. a. O., S. 262.

β, \dots, ν ergeben sich aus der zu D_n gehörigen charakteristischen Gleichung, indem man deren Wurzeln λ_i den negativ genommenen Kotangenten der Winkel $\alpha, \beta, \dots, \nu$ gleichsetzt

$$\operatorname{ctg} \alpha = -\lambda_1, \quad \operatorname{ctg} \beta = -\lambda_2, \quad \dots \quad \operatorname{ctg} \nu = -\lambda_n. \quad (8)$$

Für die Konstante c ergibt sich durch Vergleich von (6) mit (7) bei Beachtung von (2)

$$c = \frac{a_0}{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \dots \cos \nu}.$$

Besitzt nun die charakteristische Gleichung von D_n Paare konjugiert komplexer Wurzeln, dann gehören zu diesen vermöge (8) auch konjugiert komplexe Winkel, für die aber das Produkt der Kosinus reell wird. Die Konstante c ist also tatsächlich immer dann reell, wenn D_n reelle Koeffizienten besitzt. Ist $c = 1$, dann soll der Differentialoperator D_n als normiert bezeichnet werden. Ein beliebiger Differentialoperator kann also immer durch Multiplikation mit der reellen Konstanten $\frac{1}{c}$ normiert werden. Nur von solchen Operatoren soll im folgenden die Rede sein.

Ist nunmehr eine normierte lineare inhomogene Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten in der Form (5) gegeben, dann kann die Störungsfunktion $h_{n\alpha, \beta, \dots, \nu}(\varphi)$ als die Stützfunktion einer Kurve $k_{n\alpha, \beta, \dots, \nu}$ gedeutet werden. Die Lösungen $h(\varphi, c_\alpha, c_\beta, \dots, c_\nu)$ von (5) sind dann die Stützfunktionen der zu den Winkeln $\alpha, \beta, \dots, \nu$ gehörigen n -ten Evolventoiden von $k_{n\alpha, \beta, \dots, \nu}$. Die graphische Integration der Differentialgleichung (5) erfordert nunmehr die schrittweise Durchführung der zu den Winkeln $\alpha, \beta, \dots, \nu$ gehörigen Evolventoidenbildungen.

An ein graphisches Integrationsverfahren für Differentialgleichungen höherer Ordnung muß man aus konstruktionstechnischen Gründen die Forderung stellen, daß es in einfacher Weise für jeden Integrationsschritt die Berücksichtigung der fallweise gegebenen Anfangsbedingungen für eine spezielle Lösung gestattet. Diese Forderung ist bei dem hier zur Darstellung gelangenden Verfahren erfüllt, da aus den Anfangswerten $h(\varphi_0), h'(\varphi_0), h''(\varphi_0), \dots, h^{(n-1)}(\varphi_0)$ einer speziellen Lösung $h(\varphi)$ der Gl. (5) die Anfangsbedingungen für jede der erforderlichen Evolventoidenbildungen abgeleitet werden können. Es kann also bei jedem Schritt des Verfahrens immer jeweils jene Evolventoide aus der einparametrischen Schar ausgewählt werden, die zur Kurve k führt, die den gegebenen Anfangsbedingungen entspricht.

Um den Operator $D_{1\alpha}$ (2) als zur α -Evolutoidenbildung gehörig nachzuweisen, werden im folgenden die wichtigsten Beziehungen zwischen einer Kurve k und ihrer α -Evolutoide $k_{1\alpha}$ abgeleitet. Neben bekannten Formeln ergeben sich insbesondere die Gl. (18) und (19), die eine Anwendung des Verfahrens auch dann ermöglichen, wenn Paare konjugiert komplexer Winkel auftreten.

Für die Tangentialspeere t in den Punkten P von k gilt in rechtwinkligen Koordinaten x, y

$$t: \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = h(\varphi). \quad (9)$$

Daraus folgt durch mehrmalige Ableitung nach φ

$$t_1: \quad -x \sin \varphi + y \cos \varphi = h'(\varphi), \quad (10)$$

$$t_{2m}: \quad (-1)^m (x \cos \varphi + y \sin \varphi) = h^{(2m)}(\varphi), \quad (11)$$

$$t_{2m+1}: \quad (-1)^m (-x \sin \varphi + y \cos \varphi) = h^{(2m+1)}(\varphi). \quad (12)$$

Die Speere t_n erweisen sich als die Tangentialspeere in den Punkten P_n der n -ten Evoluten k_n von k . Die Punkte P_n bezeichnet man bekanntlich als die n -ten Krümmungsmitten von k . Sie sind bestimmt als die Schnittpunkte der Speere t_n und t_{n+1} . Die Abstände $r_n = \overline{P_n P_{n+1}}$ aufeinanderfolgender Krümmungsmitten bezeichnet man als n -te Krümmungsradien von k .

Aus (9) bis (12) folgt $r_n(\varphi) = D^n(1 + D^2)h(\varphi)$
 oder $r_n(\varphi) = D^n r(\varphi)$, (13)
 wenn für $n = 0$ $r(\varphi) = (1 + D^2) \cdot h(\varphi)$ (14)

gesetzt wird. Es ergibt sich also der n -te Krümmungsradius $r_n(\varphi)$ durch n -malige Ableitung des Krümmungsradius $r(\varphi)$.

Aus (9) bis (12) entnimmt man weiters, daß tatsächlich

$$h_n(\varphi) = D^n \cdot h(\varphi)$$

die Stützfunktion der n -ten Evolute k_n von k darstellt. Dabei ist allerdings zu beachten, daß sich $h_n(\varphi)$ auf eine durch den Winkel $n \cdot \frac{\pi}{2}$ gedrehte Nullrichtung bezieht.

Die Linearkombination $\cos \alpha \cdot t + \sin \alpha \cdot t_1$ der Gl. (9) und (10) für t und t_1 ergibt für den Speer $t_{1\alpha}$ die Gleichung

$$x \cos(\varphi + \alpha) + y \sin(\varphi + \alpha) = h(\varphi) \cos \alpha + h'(\varphi) \sin \alpha. \quad (15)$$

Daraus entnimmt man nun, daß

$$h_{1\alpha}(\varphi) = h(\varphi) \cos \alpha + h'(\varphi) \sin \alpha$$

oder wegen (2)

$$h_{1\alpha}(\varphi) = D_{1\alpha} \cdot h(\varphi)$$

die Stützfunktion der α -Evolutoide $k_{1\alpha}$ von k darstellt.

Es entspricht also tatsächlich dem linearen Differentialoperator $D_{1\alpha}$ (2) die α -Evolutoidenbildung und damit dem inversen Operator die α -Evolventoidenbildung. Allerdings bezieht sich auch hier die Stützfunktion $h_{1\alpha}(\varphi)$ der α -Evolutoide $k_{1\alpha}$ von k auf eine durch den Winkel α gedrehte Nullrichtung.

Die aus (15) durch Ableitung nach φ folgende Gleichung

$$-x \sin(\varphi + \alpha) + y \cos(\varphi + \alpha) = h'(\varphi) \cos \alpha + h''(\varphi) \sin \alpha \quad (16)$$

stellt den Normalenspeer $t_{2\alpha}$ im Punkte $P_{1\alpha}$ von $k_{1\alpha}$ dar.⁵ Da sich (16) als Linearkombination $\cos \alpha \cdot t_1 + \sin \alpha \cdot t_2$ erweist, so geht daher $t_{2\alpha}$ durch die zugehörige Krümmungsmittelpunkte P_1 von k .

Wir betrachten nun die zweite α, β -Evolutoide $k_{2\alpha, \beta}$ und die erste $(\alpha + \beta)$ -Evolutoide $k_{1(\alpha + \beta)}$ von k , die offensichtlich durch parallele Tangentialspeere aufeinander bezogen sind.⁶ Es gilt dann

$$D_{2\alpha, \beta} = \cos \alpha \cos \beta + D \sin(\alpha + \beta) + D^2 \sin \alpha \sin \beta$$

und

$$D_{1(\alpha + \beta)} = \cos(\alpha + \beta) + D \sin(\alpha + \beta),$$

woraus sich

$$D_{2\alpha, \beta} - D_{1(\alpha + \beta)} = (1 + D^2) \sin \alpha \sin \beta \quad (17)$$

ergibt. Setzt man

$$p = \sin \alpha \sin \beta,$$

dann folgt wegen (14) aus (17) die Formel

$$h_{2\alpha, \beta}(\varphi) - h_{1(\alpha + \beta)}(\varphi) = p \cdot r(\varphi), \quad (18)$$

die den Abstand paralleler Tangentialspeere von $k_{2\alpha, \beta}$ und $k_{1(\alpha + \beta)}$ zum Krümmungsradius r von k in Beziehung setzt. Durch n -malige Ableitung nach φ folgt daraus unter Beachtung von (13)

$$h_{2\alpha, \beta}^{(n)}(\varphi) - h_{1(\alpha + \beta)}^{(n)}(\varphi) = p \cdot r_n(\varphi). \quad (19)$$

Es ist also auch der n -te Krümmungsradius r_n von k ein konstantes Vielfaches des Abstandes paralleler Tangentialspeere der n -ten Evoluten von $k_{2\alpha, \beta}$ und $k_{1(\alpha + \beta)}$. Die Formeln (18) und (19) ermöglichen die Durchführung des graphischen Integrations-

⁵ Vgl. Abb. 1 auf S. 417.

⁶ Vgl. Abb. 2 auf S. 418.

verfahrens auch dann, wenn in der Produktzerlegung eines Differentialoperators n -ter Ordnung D_n (7) konjugiert komplexe Winkel auftreten.

Wir zeigen im folgenden, wie man einen Differentialoperator zweiter Ordnung normiert und im Falle des Auftretens konjugiert komplexer Winkel die reelle Konstante p bestimmt. Aus

$$D_2 = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 \quad (20)$$

folgt durch einfache Umformungen

$$D_2 = (a_0 - a_2) + a_1 D + a_2 (1 + D^2)$$

und

$$\frac{1}{c} D_2 = D_{2\alpha, \beta} = \cos(\alpha + \beta) + D \sin(\alpha + \beta) + p(1 + D^2)$$

mit

$$c = \sqrt{(a_0 - a_2)^2 + a_1^2}, \quad \alpha + \beta = \arctg \frac{a_1}{a_0 - a_2}, \quad p = \frac{a_2}{\sqrt{(a_0 - a_2)^2 + a_1^2}} \quad (21)$$

Die Konstanten c , p und der Winkel $\alpha + \beta$ werden demnach auch dann reell, wenn die zu D_2 (20) gehörige charakteristische Gleichung konjugiert komplexe Wurzeln besitzt.

Wir wenden uns nun der konstruktiven Seite unserer Aufgabe zu. Unter der Bezeichnung „Graphische Integrationsverfahren von Differentialgleichungen“ werden in der Literatur die mannigfachsten Teilaufgaben dieses Fragenkreises verstanden, ohne daß eine scharfe begriffliche Abgrenzung derselben vorgenommen wird. Wir stellen daher hier fest, daß es drei Gesichtspunkte sind, die bei jeder graphischen Integration beachtet werden müssen.

1. Festlegung der Elementmannigfaltigkeit.

Die Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (22)$$

definiert in jedem Koordinatensystem eine $n + 1$ -parametrische Mannigfaltigkeit von Linienelementen n -ter Ordnung. Es soll dann zu gegebenen Anfangsbedingungen

$$x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)} \quad (23)$$

das zugehörige Linienelement n -ter Ordnung von (22) auf konstruktivem Wege bestimmbar sein. Wird jedoch die Lösung von (22) durch fortgesetzte Bildung sog. erster Integrale

$$F_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, c_1) = 0, \dots, F_n(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad (24)$$

ins Auge gefaßt, dann soll aus den Anfangsbedingungen (23) für die gesuchte Integralkurve k auf konstruktivem Wege die Bestimmung der erforderlichen Anfangsbedingungen für jede der auftretenden Teilintegrationen möglich sein, so daß k neben (22) auch allen Gl. (24) genügt.

2. Durchführung der eigentlichen Integrationsaufgabe.

Darunter soll die Ausführung jener Konstruktionsvorschriften verstanden werden, die es gestatten, aus einem gegebenen Linienelement n -ter Ordnung von (22) ein dazu genügend benachbartes Linienelement n -ter Ordnung zu finden, das gleichfalls zur Mannigfaltigkeit (22) gehört und von dem angenommen werden darf, daß es mit dem Ausgangselement zum gleichen Elementverein gehört.

Für Differentialgleichungen erster Ordnung kommen am häufigsten die folgenden Verfahren zur Anwendung.

a) Schiebverfahren.

Der Punkt P eines Linienelementes erster Ordnung (P, t) wird auf der Tangente t desselben in eine Nachbarlage P' verschoben und sodann die zum Punkt P' gehörige Elementgerade t ermittelt. Ein Gegenstück dazu ist das

b) Drehverfahren.

Hier wird die Gerade t des Linienelementes (P, t) um den Punkt P in eine Nachbarlage t' gedreht und sodann der zur Geraden t' gehörige Elementpunkt P' ermittelt. Wird das Linienelement (P, t') als dem Linienelement (P, t) durch das Drehverfahren erhalten, dann ergibt sich umgekehrt (P, t) aus (P', t') durch das Schiebverfahren.

Die beiden Verfahren a und b entsprechen jedoch nur geringen Genauigkeitsansprüchen. Wesentlich besser ist das

c) Sehnenverfahren,

das auch als die „Methode der eingeschalteten Halbschritte“ bekannt ist. Es wird zuerst a und dann b ausgeführt. Es ergeben sich sodann aus einem Linienelement (P, t) die beiden Linienelemente (P', t') und (P'', t'') , von denen jedoch (P', t') nicht als zu dem gesuchten Elementverein k gehörig betrachtet wird. Das zum Element (P, t) auf k benachbarte Element (P'', t'') ist dabei möglichst so zu wählen, daß die Kurvensehne PP'' zur Elementgeraden t' parallel wird. Beim Übergang von (P, t) zu (P'', t'') erfährt also der Elementpunkt eine Verschiebung längs einer Kurvensehne, während die Elementgerade gleichzeitig eine Drehung um den Elementpunkt ausführt.

Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden häufig die beiden folgenden Verfahren angewendet.

d) Krümmungskreisverfahren.

Ist im Linienelement erster Ordnung (P, t) ein Linienelement zweiter Ordnung (P, t, P_1) durch seine Krümmungsmitte P_1 gegeben, dann wird (P, t) um P_1 in eine Nachbarlage (P', t') gedreht und sodann die zum Linienelement erster Ordnung (P', t') gehörige Krümmungsmitte P_1' ermittelt. Eine Variante dazu stellt das

e) Verfahren nach Lord Kelvin

dar. Auch hier wird die gesuchte Integralkurve k stückweise durch Krümmungskreisbögen ersetzt, doch gehören diese nicht wie in d) zu den Linienelementen erster Ordnung in den Berührungspunkten derselben, sondern zu solchen Linienelementen erster Ordnung, die ungefähr in der Mitte der Krümmungskreisbögen liegen.

3. Verbesserung einer Näherungslösung.

Darunter soll die konstruktive Durchführung der verschiedenen Iterationsverfahren verstanden werden. Sie gestatten es, aus einer Näherungslösung eine verbesserte Näherungslösung zu gewinnen, die gleichfalls den gegebenen Anfangsbedingungen entspricht. Neben dem Picardschen Iterationsverfahren kommen vor allem die von E. Vietoris angegebenen Iterationsverfahren in Frage.⁷

Wir haben nun im Hinblick auf unsere spezielle Aufgabe zu den Punkten 1, 2 und 3 Stellung zu nehmen.

Ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten in der Form (3) gegeben, wobei der Differentialoperator $D_{1\alpha}$ als normiert vorausgesetzt wird, dann stellt die Störungsfunktion $h_{1\alpha}(\varphi)$ die Stützfunktion einer Kurve $k_{1\alpha}$ dar, die als die α -Evolutoide der gesuchten Integralkurve k zu betrachten ist.⁸ Die durch (3) bestimmte Linienelementmannigfaltigkeit ist also in einfachster Weise durch ihre Isoklinen gegeben, die sich als die Tangentialspeere von $k_{1\alpha}$ erweisen. Entspricht der Speer t der Anfangsbedingung $h(\varphi_0)$, dann ist der Punkt P des Linienelementes (P, t) auf t festgelegt als der Schnittpunkt von t

⁷ L. Vietoris: Über die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Iteration. *Mh. Math. Physik* 39, 15—50 (1932).

⁸ Vgl. Abb. 1 auf S. 417.

mit dem gegen t unter dem Winkel α geneigten Tangentialspeer $t_{1\alpha}$ von $k_{1\alpha}$. Kann von $t_{1\alpha}$ noch der Berührungspunkt $P_{1\alpha}$ mit $k_{1\alpha}$ angegeben werden, dann ergibt sich die Krümmungsmitte P_1 von k in (P, t) als Schnittpunkt des Normalspeeres t_1 von k mit dem Normalspeer $t_{2\alpha}$ von $k_{1\alpha}$. Die Kenntnis der Krümmungsmitte $P_{2\alpha}$ von $k_{1\alpha}$ auf $t_{2\alpha}$ ermöglicht sogar die Ermittlung der zweiten Krümmungsmitte P_2 von k . Es kann also leicht zu jedem Anfangsspeer t von k das zugehörige Linienelement zweiter bzw. dritter Ordnung bestimmt werden.

Die Integrationsarbeit im engeren Sinne kann nunmehr nach jedem der unter 2 angegebenen fünf Verfahren durchgeführt werden. Für die Verbesserung einer Näherungslösung erweist sich die Evolventeniteration⁹ nach L. Vietoris am zweckmäßigsten, die auch gleichzeitig mit der Integration ausgeführt werden kann.

Steht eine Schablone für die zum Winkel α gehörige logarithmische Spirale zur Verfügung, dann kann auch diese mit Vorteil zum Zeichnen von k verwendet werden. Die zum Winkel α gehörigen und k oskulierenden logarithmischen Spiralen besitzen nämlich ihre Pole auf $k_{1\alpha}$. Wird daher die Schablone so aufgelegt, daß der Pol in $P_{1\alpha}$ liegt und die logarithmische Spirale den Speer t in P berührt, dann kann k in der Umgebung von P durch die Spirale ersetzt werden. Eine Verschiebung des Pols auf $k_{1\alpha}$ und eine darauffolgende Dre-

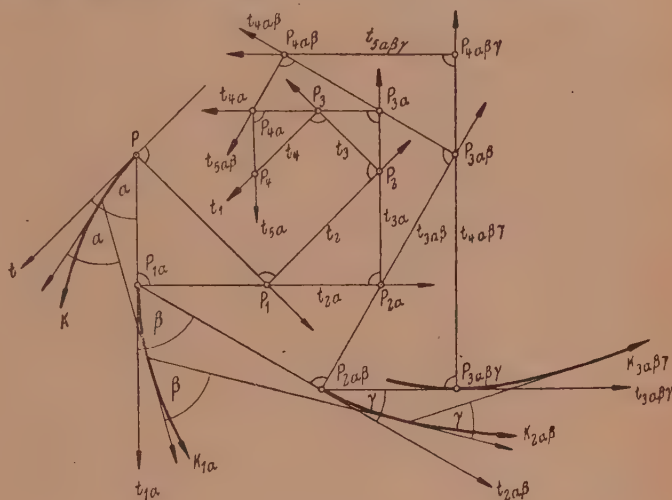


Abb. 1.

hung der Spirale, bis eine Berührung mit ihrer ursprünglichen Lage eintritt, ermöglicht ein weiteres Stück von k durch diese zu ersetzen.

Als Beispiel für die Durchführung der Integration einer linearen Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten wählen wir die Gleichung dritter Ordnung

$$h_{3\alpha, \beta, \gamma}(\varphi) = D_{3\alpha, \beta, \gamma} \cdot h(\varphi),$$

deren Differentialoperator $D_{3\alpha, \beta, \gamma}$ wir als normiert und durch die reelle Produkt-

$$D_{3\alpha, \beta, \gamma} = D_{1\alpha} \cdot D_{1\beta} \cdot D_{1\gamma}$$

gegeben voraussetzen. Die Störungsfunktion $h_{3\alpha, \beta, \gamma}(\varphi)$ fassen wir wieder als die Stützfunktion einer Kurve $k_{3\alpha, \beta, \gamma}$ auf, die als dritte α, β, γ -Evolutoide der gesuchten Integralkurve k zu betrachten ist (Abb. 1).¹⁰ k ist also die dritte α, β, γ -Evolventoide von $k_{3\alpha, \beta, \gamma}$, die aus $k_{3\alpha, \beta, \gamma}$ durch dreimalige Evolventoidenbildung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $h(\varphi_0)$, $h'(\varphi_0)$, $h''(\varphi_0)$ erhalten wird. Dazu benötigen wir vor allem die zu jeder einzelnen dieser Evolventoidenbildungen gehörigen Anfangsbedingungen.

Sind t , t_1 und t_2 die zu den Anfangsbedingungen gehörigen Speere, dann schneiden sich t und t_1 im Punkte P und t_1 und t_2 im Punkte P_1 . Im Linienelement erster Ordnung (P, t) von k ist damit ein Linienelement zweiter Ordnung (P, t, P_1) mit P_1 als Krüm-

⁹ L. Vietoris: A. a. O., S. 46.

¹⁰ In Abb. 1 ist $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{6}$.

mungsmittle bestimmt. Wir legen nun durch P den Speer $t_{1\alpha}$, der mit t den Winkel α einschließt, und dazu den Normalspeer $t_{2\alpha}$ durch P_1 . Der Schnittpunkt $P_{1\alpha}$ dieser Speere bestimmt sodann im Verein mit $t_{1\alpha}$ ein Linienelement $(P_{1\alpha}, t_{1\alpha})$ der α -Evolutoide $k_{1\alpha}$ von k . Durch $P_{1\alpha}$ legen wir nun den Speer $t_{2\alpha, \beta}$, der mit $t_{1\alpha}$ den Winkel β einschließt, und ermitteln den gegen $t_{2\alpha, \beta}$ unter dem Winkel γ geneigten Tangentialspeer $t_{3\alpha, \beta, \gamma}$ von $k_{3\alpha, \beta, \gamma}$, der $k_{3\alpha, \beta, \gamma}$ in $P_{3\alpha, \beta, \gamma}$ berührt. Der Schnittpunkt $P_{2\alpha, \beta}$ von $t_{2\alpha, \beta}$ mit $t_{3\alpha, \beta, \gamma}$ bestimmt nun im Verein mit $t_{2\alpha, \beta}$ ein Linienelement erster Ordnung $(P_{2\alpha, \beta}, t_{2\alpha, \beta})$ der zweiten α, β -Evolutoide $k_{2\alpha, \beta}$ von k . Damit sind nun für jede der auftretenden Evolventoidenbildungen die Anfangsbedingungen gegeben und es kann nunmehr die Integration wie zuvor besprochen durchgeführt werden.

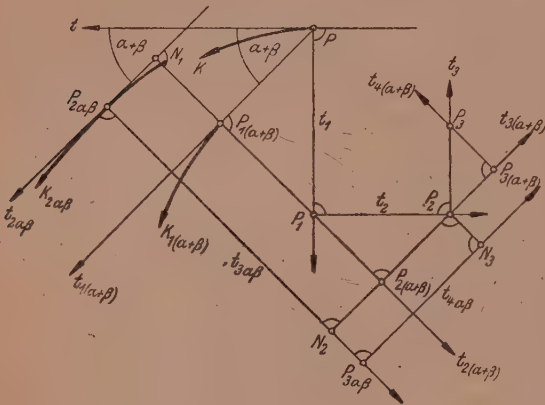


Abb. 2.

in $P_{3\alpha, \beta, \gamma}$ bekannt ist. Es ergibt sich sodann für k ein Linienelement fünfter Ordnung $(P, t, P_1, P_2, P_3, P_4)$, für $k_{1\alpha}$ ein solches vierter Ordnung $(P_{1\alpha}, t_{1\alpha}, P_{2\alpha}, P_{3\alpha}, P_{4\alpha})$ und für $k_{2\alpha, \beta}$ ein Linienelement dritter Ordnung $(P_{2\alpha, \beta}, t_{2\alpha, \beta}, P_{3\alpha, \beta, \gamma}, P_{4\alpha, \beta, \gamma})$. Damit sind in mehr als hinreichendem Maße die Voraussetzungen für die Integrationsarbeit im engeren Sinne gegeben, die nach den in Punkt 2 genannten Verfahren sowie unter Verwendung von Schablonen ausgeführt werden kann.

Wir haben nun noch zu zeigen, welcher Weg zu beschreiten ist, wenn bei der Produktzerlegung eines linearen Differentialoperators n -ter Ordnung konjugiert komplexe Winkel auftreten. Es genügt offenbar, den Fall $n = 2$ zu betrachten.

Ist

$$h_{2\alpha, \beta}(\varphi) = D_{2\alpha, \beta} \cdot h(\varphi)$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den konjugiert komplexen Winkeln α und β , dann bestimmen wir vorerst nach (21) aus den Koeffizienten von $D_{2\alpha, \beta}$ den reellen Winkel $\alpha + \beta$ und die Konstante p . Wir deuten sodann die Störungsfunktion $h_{2\alpha, \beta}(\varphi)$ wieder als die Stützfunktion einer Kurve $k_{2\alpha, \beta}$ (Abb. 2),¹¹ die als zweite α, β -Evolutoide der gesuchten Integralkurve k aufzufassen ist. Sind t und t_1 die den Anfangsbedingungen $h(\varphi_0)$ und $h'(\varphi_0)$ entsprechenden Speere, dann bestimmt ihr Schnittpunkt P im Verein mit t ein Linienelement erster Ordnung (P, t) von k . Wir ermitteln nun jenen Tangentialspeer $t_{2\alpha, \beta}$ von $k_{2\alpha, \beta}$, der mit t den reellen Winkel $\alpha + \beta$ einschließt und legen sodann durch P den dazu parallelen Speer $t_{1(\alpha + \beta)}$, der Tangentialspeer an die erste $(\alpha + \beta)$ -Evolutoide $k_{1(\alpha + \beta)}$ von k ist. Aus der Gl. (18) folgt nun, daß der Abstand $N_1 P_{1(\alpha + \beta)}$ der parallelen Speere $t_{2\alpha, \beta}$ und $t_{1(\alpha + \beta)}$ mit dem p -fachen Krümmungsradius r von k übereinstimmt. Daraus ergibt sich die

¹¹ In Abb. 2 ist $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, $p = \frac{1}{2}$.

Krümmungsmitte P_1 von k , die im Verein mit (P, t) ein Linienelement zweiter Ordnung (P, t, P_1) der gesuchten Integralkurve k bestimmt.

Der Normalenspeer $t_{3\alpha, \beta}$ von $k_{2\alpha, \beta}$ im Berührungspunkt $P_{2\alpha, \beta}$ von $t_{2\alpha, \beta}$ mit $k_{2\alpha, \beta}$ ist Tangentialspeer an die Evolute $k_{3\alpha, \beta}$ von $k_{2\alpha, \beta}$. Desgleichen ist der durch $P_{1(\alpha+\beta)}$ gehende und zu $t_{1(\alpha+\beta)}$ normale Speer $t_{2(\alpha+\beta)}$ Tangentialspeer an die Evolute $k_{2(\alpha+\beta)}$ von $k_{1(\alpha+\beta)}$. Es stellt daher nach Gl. (19) der Abstand $\overline{N_2 P_{2(\alpha+\beta)}}$ dieser parallelen Speere das p -fache des Krümmungsradius r_1 der Evolute k_1 von k dar. Dadurch ist die zweite Krümmungsmitte P_2 von k bestimmt. Die Krümmungsmitte $P_{2(\alpha+\beta)}$ von $k_{1(\alpha+\beta)}$ ergibt sich als Schnittpunkt von $t_{2(\alpha+\beta)}$ mit $t_{3(\alpha+\beta)}$. Ist von $k_{2\alpha, \beta}$ noch die Krümmungsmitte $P_{3\alpha, \beta}$ bekannt, dann kann, wie die Abb. 2 zeigt, daraus für die Kurven k und $k_{1(\alpha+\beta)}$ noch je eine weitere Krümmungsmitte P_3 und $P_{3(\alpha+\beta)}$ gefunden werden. Es ergibt sich somit für k ein Linienelement vierter Ordnung (P, t, P_1, P_2, P_3) und für $k_{1(\alpha+\beta)}$ ein solches dritter Ordnung $(P_{1(\alpha+\beta)}, t_{1(\alpha+\beta)}, P_{2(\alpha+\beta)}, P_{3(\alpha+\beta)})$. Damit sind wieder in hinreichendem Maße die Voraussetzungen für die Integrationsarbeit im engeren Sinne gegeben. Es muß hier betont werden, daß die Kurve $k_{1(\alpha+\beta)}$ selbst für die Konstruktion der Kurve k nicht benötigt wird.

Damit ist nun gezeigt, daß die graphische Integration von linearen inhomogenen Differentialgleichungen von beliebig hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten in allen Fällen in überaus einfacher Weise durchgeführt werden kann.

Aus dem Meissnerschen Linienbildverfahren wird durch die Polarität am Einheitskreis um den Koordinatenursprung bekanntlich das sog. Orthopolarenverfahren von R. Grammel¹² erhalten. Aus einer Kurve k und ihren ersten n -Evoluten k, k_1, k_2, \dots, k_n ergeben sich durch diese Polarität die Kurve $\bar{k}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_n$, die von R. Grammel als Polarbild bzw. als erstes, zweites usw. n -tes Orthopolarbild der Funktion $h(\varphi)$ bezeichnet werden. Zur Festlegung der Kurve \bar{k} und ihrer Orthopolarbilder $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_n$ werden polare Punktkoordinaten $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ verwendet, wobei

$$\varrho(\varphi) = \frac{1}{h(\varphi)}, \quad \varrho_1(\varphi) = \frac{1}{h'(\varphi)}, \dots, \quad \varrho_n(\varphi) = \frac{1}{h^{(n)}(\varphi)}$$

gilt. Dabei ist zu beachten, daß sich der Polarwinkel für das i -te Orthopolarbild auf eine durch den Winkel $i \cdot \frac{\pi}{2}$ gedrehte Nullrichtung bezieht.

Es entspricht also dem Differentialoperator D in der Grammelschen Darstellung die Orthopolarenbildung.

Konstruktiv ergibt sich zu einer Kurve \bar{k} die Orthopolare \bar{k}_1 , indem die Tangenten p von \bar{k} mit den durch den Winkel $\frac{\pi}{2}$ gedrehten Radien geschnitten werden. Diese Konstruktion ist zur Evolutenbildung dual. Es erhebt sich nun die Frage, welche Konstruktion der α -Evolutoidenbildung vermöge der Polarität am Einheitskreis um o entspricht. Es ergibt sich, daß an die Stelle der Grammelschen Orthopolarenbildung eine Konstruktion treten muß, die sinngemäß als α -Isopolarenbildung bezeichnet werden kann. Das α -Isopolarbild $\bar{k}_{1\alpha}$ einer Kurve \bar{k} ergibt sich, indem die Tangenten p von \bar{k} mit den durch den Winkel α gedrehten Radien geschnitten werden. Die α -Isopolarenbildung ist also die naturgemäße Verallgemeinerung der Grammelschen Orthopolarenbildung. Sind $\varrho_{1\alpha}, \varphi$ die polaren Punktkoordinaten für das α -Isopolarbild $\bar{k}_{1\alpha}$ von \bar{k} , dann gilt also

$$\varrho_{1\alpha}(\varphi) = \frac{1}{D_{1\alpha} \cdot h(\varphi)},$$

¹² R. Grammel: Ein Gegenstück zum Meissnerschen Verfahren der graphischen Analysis. Ingenieur-Arch. 10, 395—411 (1939).

wobei sich der Polarwinkel φ auf eine durch den Winkel α gedrehte Nullrichtung bezieht.

Dem linearen Differentialoperator $D_{1\alpha}$ (2) entspricht somit in der Grammelschen Darstellung die α -Isopolarenbildung.

Es entspricht also auch einem normierten linearen Differentialoperator n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $D_{n\alpha, \beta, \dots, \nu}$ die n -fache, zu den Winkeln $\alpha, \beta, \dots, \nu$ gehörige Isopolarenbildung. Ebenso wie die Evolutoidenbildungen sind nunmehr auch die Isopolarenbildungen untereinander vertauschbar.

Ist nun eine lineare inhomogene Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten in der Form (5) gegeben, dann stellt

$$\varrho_{n\alpha, \beta, \dots, \nu}(\varphi) = \frac{1}{D_{n\alpha, \beta, \dots, \nu} h(\varphi)}$$

die Polargleichung einer Kurve $\bar{k}_{n\alpha, \beta, \dots, \nu}$ dar, die als das n -te $\alpha, \beta, \dots, \nu$ -Isopolarbild der gesuchten Integralkurve \bar{k} zu betrachten ist. Sind die Anfangsbedingungen für \bar{k} gegeben, dann kann \bar{k} durch n -malige schrittweise Umkehrung der Isopolarenbildung gefunden werden. Die praktische Durchführung geschieht unter Beachtung der von R. Grammel für das Orthopolarenverfahren gegebenen Hinweise.

(Eingegangen am 5. November 1946.)

Kraftausbreitung in einer Säule.

Von K. Girkmann, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

1. Einleitung.

Im Steg einer Säule mit I-förmigem Querschnitt mit der Fläche F greife eine Axialkraft P an: Abb. 1. Es wird die Ausbreitung dieser Kraft untersucht und festgestellt, ab welcher Entfernung vom Lastangriffspunkt der oberhalb liegende Säulenteil praktisch als spannungsfrei, der unterhalb liegende als gleichmäßig mit $\sigma_{x0} = -\frac{P}{F}$ gedrückt betrachtet werden darf.

Die Säule wird als Scheibenwerk aufgefaßt, bestehend aus einer Stegscheibe (Breite $2b$, Dicke δ) und aus vier Flanschscheiben (Breiten c , Dicken t). Bei der Aufstellung der Randbedingungen wird scharnierartiger Zusammenschluß der Scheiben angenommen und die idealisierte Stegbreite $2b$ (Abb. 1 b, c) in Rechnung gestellt.

Wir nehmen zunächst an, die Säule sei unendlich lang und im Unendlichen an beiden Enden $x = \pm \infty$ gestützt, wobei dort die Reaktionen $\pm \frac{1}{2}P$ auftreten (Abb. 2a). Durch Überlagerung der Teilbelastung Abb. 2b gelangen wir zur unendlich langen, aber nur in $x = -\infty$ gestützten Säule, aus der wir dann die gegebene Säule mittels der Schnitte $x = h_1, x = -h_2$ heraustrennen.

2. Teilbelastung nach Abb. 2a; Stegscheibe.

Die Airysche Spannungsfunktion, die den Spannungszustand der Stegscheibe beschreiben soll, setzen wir zusammen aus der Spannungsfunktion F_a der unendlich ausgedehnten, im Punkte $x = 0, y = 0$ durch die Einzelkraft P belasteten Ebene und aus einer regulären Zusatzfunktion F_b , mit deren Hilfe die Erfüllung der

Randbedingungen an den Rändern $y = \pm b$ der Stegscheibe ermöglicht wird. Die Funktion F_a schreiben wir in der Form¹ an:

$$F_a = \frac{1+\mu}{4} \frac{P}{\pi \delta_0} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha y \right) e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha \quad (y \geq 0), \quad (1)$$

wobei μ die Querdehnungszahl des Werkstoffes bedeutet. Im Hinblick auf die gewählte Darstellung der Funktion F_a setzen wir auch die Funktion F_b in Form eines Fourierschen Integrales an. Entsprechend den Symmetrieeigenschaften des von P hervorgerufenen Spannungszustandes muß auch F_b — so wie F_a — eine ungerade Funktion von x und eine gerade Funktion von y sein. Wegen der Symmetrie zur x -Achse genügt es, die Lösung den Bedingungen eines Längsrandes anzupassen. Die Funktion F_b , die wir aus bekannten partikulären Integralen der Scheibengleichung $\Delta \Delta F = 0$ zusammenstellen, braucht daher nur zwei noch näher ermittelbare Parameterfunktionen zu enthalten. Auf Grund der vorstehenden Überlegungen wählen wir den Ansatz

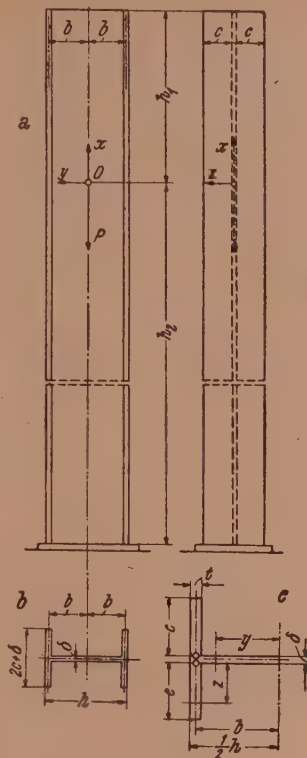


Abb. 1 a-c.

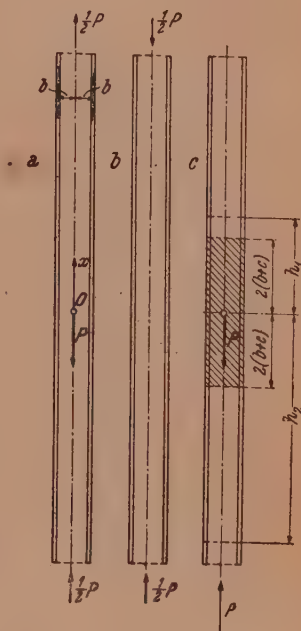


Abb. 2 a-c.

$$F_b = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2} (A_1 \cos \alpha y + B_1 \alpha y \sin \alpha y) \sin \alpha x d\alpha, \quad (2)$$

wobei über die Funktionen $A_1(\alpha)$ und $B_1(\alpha)$ noch verfügt werden kann.

Mit (1) und (2) ist die Airysche Spannungsfunktion

$$F_1 = F_a + F_b \quad (3)$$

der streifenförmigen Stegscheibe festgelegt. Sie liefert die Spannungskomponenten

$$\sigma_x' = \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = Q_0 \int_0^\infty \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} - \alpha y \right) e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha + \int_0^\infty [(A_1 + 2 B_1) \cos \alpha y + B_1 \alpha y \sin \alpha y] \sin \alpha x d\alpha, \quad (4/1)$$

$$\sigma_y' = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} = -Q_0 \int_0^\infty \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha y \right) e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha - \int_0^\infty (A_1 \cos \alpha y + B_1 \alpha y \sin \alpha y) \sin \alpha x d\alpha, \quad (4/2)$$

$$\tau_{xy}' = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = Q_0 \int_0^\infty \left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha y \right) e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha - \int_0^\infty [(A_1 + B_1) \sin \alpha y + B_1 \alpha y \cos \alpha y] \cos \alpha x d\alpha, \quad (4/3)$$

¹ K. Girkmann: Flächentragwerke, S. 106. Wien: Springer-Verlag. 1946.

wobei die Hilfsgröße Q gegeben ist durch

$$Q = \frac{1+\mu}{4} \frac{P}{\pi \delta}. \quad (5)$$

3. Die Flanschscheiben.

Um die Übergangsbedingungen am Rande $z = 0$ und die beiden Bedingungen für den freien Rand $z = c$ erfüllen zu können, muß der Ansatz für die Spannungsfunktion F_2 jeder streifenförmigen Flanschscheibe vier frei wählbare Parameterfunktionen enthalten. Wir bilden daher aus bekannten partikulären Integralen der Scheibengleichung die wieder in x ungerade Spannungsfunktion

$$F_2 = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2} (A_2 \mathfrak{Cof} \alpha z + B_2 \alpha z \mathfrak{Sin} \alpha z + C_2 \mathfrak{Sin} \alpha z + D_2 \alpha z \mathfrak{Cof} \alpha z) \sin \alpha x d\alpha \quad (6)$$

mit den Parameterfunktionen $A_2(\alpha)$, $B_2(\alpha)$, $C_2(\alpha)$ und $D_2(\alpha)$. Aus (6) folgt

$$\sigma_x'' = \int_0^\infty [(A_2 + 2 B_2) \mathfrak{Cof} \alpha z + B_2 \alpha z \mathfrak{Sin} \alpha z + (C_2 + 2 D_2) \mathfrak{Sin} \alpha z + D_2 \alpha z \mathfrak{Cof} \alpha z] \sin \alpha x d\alpha, \quad (7/1)$$

$$\sigma_z'' = - \int_0^\infty (A_2 \mathfrak{Cof} \alpha z + B_2 \alpha z \mathfrak{Sin} \alpha z + C_2 \mathfrak{Sin} \alpha z + D_2 \alpha z \mathfrak{Cof} \alpha z) \sin \alpha x d\alpha, \quad (7/2)$$

$$\tau_{xz}'' = - \int_0^\infty [(A_2 + B_2) \mathfrak{Sin} \alpha z + B_2 \alpha z \mathfrak{Cof} \alpha z + (C_2 + D_2) \mathfrak{Cof} \alpha z + D_2 \alpha z \mathfrak{Sin} \alpha z] \cos \alpha x d\alpha. \quad (7/3)$$

4. Aufstellung der Randbedingungen.

Unter Beachtung der eingangs durchgeführten Idealisierungen sind folgende Randbedingungen zu erfüllen:

a) Am Rande $y = \pm b$ des Steges muß $\sigma_y = 0$ sein. Wegen der Symmetrie des Spannungszustandes des Steges genügt die Betrachtung des Randes $y = +b$. Im Hinblick auf Gl. (4/2) ist diese Bedingung für jedes x erfüllt, wenn die Beziehung besteht

$$A_1 \mathfrak{Cof} \alpha b + B_1 \alpha b \mathfrak{Sin} \alpha b = -Q \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) e^{-\alpha b}. \quad (8/1)$$

b) In $y = b$ gibt der Steg die Schubkraft $T = \delta \cdot (\tau_{xy}')_{y=b}$ an die anschließenden Flanschteile ab und es muß aus Gleichgewichtsgründen an jeder Stelle x

$$\delta \cdot (\tau_{xy}')_{y=b} = 2 t (\tau_{xz}'')_{z=0}$$

sein. Mit den Gl. (4/3) und (7/3) lautet diese Bedingung

$$Q \left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha b \right) e^{-\alpha b} - (A_1 + B_1) \mathfrak{Sin} \alpha b - B_1 \alpha b \mathfrak{Cof} \alpha b = -\frac{2t}{\delta} (C_2 + D_2). \quad (8/2)$$

c) Die Stegscheibe und die anschließenden Flanschscheiben müssen in $y = b$, $z = 0$ gleiche Dehnungen ε_x aufweisen:

$$(\varepsilon_x')_{y=b} = (\varepsilon_x'')_{z=0}.$$

Dann werden aber auch die Normalspannungen $(\sigma_x')_{y=b}$ und $(\sigma_x'')_{z=0}$ annähernd gleich sein; denn es ist

$$(\varepsilon_x'')_{z=0} = \frac{1}{E} [(\sigma_x'')_{z=0} - \mu (\sigma_z'')_{z=0}]$$

und da die Flanschspannungen $(\sigma_z'')_{z=0}$ durch den Endteil des Steges hindurch, von einer Flanschhälfte zur anderen, übertragen werden, kann näherungsweise die Randdehnung des Steges gleich

$$(\varepsilon_x')_{y=b} = \frac{1}{E} [(\sigma_x')_{y=b} - \mu (\sigma_z'')_{z=0}]$$

gesetzt werden, so daß die gegenständliche Randbedingung auch in der Form

$$(\sigma_x')_{y=b} = (\sigma_x'')_{z=0}$$

angeschrieben werden kann. Diese Bedingung muß für jedes x erfüllt sein. Wie aus den Gl. (4/1) und (7/1) hervorgeht, trifft dies zu, wenn die Beziehung gilt

$$Q \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) e^{-\alpha b} + (A_1 + 2 B_1) \mathfrak{Cof} \alpha b + B_1 \alpha b \mathfrak{Sin} \alpha b = A_2 + 2 B_2. \quad (8/3).$$

Im Hinblick auf die bestehende Symmetrie erübrigt sich die Aufstellung der gleichen Bedingung für den Stegrand $y = -b$.

d) Am Rande $z = c$ der Flanschen muß $\sigma_z = 0$ sein. Wie aus (7/2) folgt, ist diese Bedingung an jeder Stelle x erfüllt, wenn die Gleichung besteht

$$A_2 \mathfrak{Cof} \alpha c + B_2 \alpha c \mathfrak{Sin} \alpha c + C_2 \mathfrak{Sin} \alpha c + D_2 \alpha c \mathfrak{Cof} \alpha c = 0. \quad (8/4)$$

e) An jedem äußeren Flanschrand $z = c$ muß ferner $\tau_{zx}'' = 0$ sein. Gemäß (7/3) gilt somit $(A_2 + B_2) \mathfrak{Sin} \alpha c + B_2 \alpha c \mathfrak{Cof} \alpha c + (C_2 + D_2) \mathfrak{Cof} \alpha c + D_2 \alpha c \mathfrak{Sin} \alpha c = 0. \quad (8/5)$

f) Schließlich müssen die inneren Flanschränder $z = 0$, wenn von der Stärkenänderung des zwischenliegenden Stegstückes abgesehen wird, gerade bleiben und die Verschiebungen w der Randpunkte der Flanschen müssen also Null sein. Für die Verschiebungskomponenten w_2 der Flanschpunkte gilt² im vorliegenden Falle

$$E w_2 = \int \sigma_z'' dz - \mu \frac{\partial F_2}{\partial z} + K_1 x + K_2,$$

wobei K_1 und K_2 aus den Randbedingungen sich ergebende Festwerte bedeuten. Mit (6) und (7/2) folgt hieraus

$$\begin{aligned} E w_2 = & - \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} [A_2 \mathfrak{Sin} \alpha z + B_2 (\alpha z \mathfrak{Cof} \alpha z - \mathfrak{Sin} \alpha z) + C_2 \mathfrak{Cof} \alpha z + \\ & + D_2 (\alpha z \mathfrak{Sin} \alpha z - \mathfrak{Cof} \alpha z)] \sin \alpha x d\alpha - \mu \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} [(A_2 + B_2) \mathfrak{Sin} \alpha z + \\ & + \alpha z B_2 \mathfrak{Cof} \alpha z + (C_2 + D_2) \mathfrak{Cof} \alpha z + \alpha z D_2 \mathfrak{Sin} \alpha z] \sin \alpha x d\alpha + K_1 x + K_2. \end{aligned}$$

Für den Rand $z = 0$ entsteht hieraus

$$E (w_2)_{z=0} = - \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} [(C_2 - D_2) + \mu (C_2 + D_2)] \sin \alpha x d\alpha + K_1 x + K_2.$$

Diese Randverschiebung muß an jeder Stelle x Null sein. Das trifft zu für $K_1 = K_2 = 0$ und für

$$C_2 - D_2 + \mu (C_2 + D_2) = 0. \quad (8/6)$$

5. Ermittlung der Parameterfunktionen.

Aus den sechs Randbedingungen (8/1) bis (8/6) können die sechs unbekannten Parameterfunktionen A_1, B_1, A_2, B_2, C_2 und D_2 bestimmt werden. Wir drücken zunächst mit Hilfe der Gl. (8/1) und (8/3) bis (8/6) die Funktionen A_1, B_1, A_2, B_2 und C_2 durch D_2 aus; mit Benützung der Hilfsgröße

$$\Phi = \frac{\frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{3+\mu}{1+\mu} \mathfrak{Cof}^2 \alpha c + \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c + 2 \alpha c} \quad (9)$$

erhalten wir so

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= Q \frac{e^{-\alpha b}}{\mathfrak{Cof} \alpha b} \left[-\frac{1-\mu}{1+\mu} + \alpha b (1 + \mathfrak{I}g \alpha b) \right] + D_2 \frac{\alpha b \mathfrak{I}g \alpha b}{\mathfrak{Cof} \alpha b} \Phi, \\ B_1 &= -Q \frac{e^{-\alpha b}}{\mathfrak{Cof} \alpha b} - \frac{D_2}{\mathfrak{Cof} \alpha b} \Phi, \\ A_2 &= -2 D_2 \frac{\frac{1-\mu}{1+\mu} \mathfrak{Sin}^2 \alpha c + \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c + 2 \alpha c}, \quad B_2 = -2 D_2 \frac{\frac{1-\mu}{1+\mu} + \mathfrak{Cof}^2 \alpha c}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c + 2 \alpha c}, \\ C_2 &= \frac{1-\mu}{1+\mu} D_2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

² S. a. a. O., S. 26, 27, Gl. (62a), (64).

Mit Hilfe der Ergebnisse (10) ermitteln wir schließlich aus Gl. (8/2) die Parameterfunktion D_2 :

$$D_2 = -Q \frac{\left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha b \operatorname{tg} \alpha b\right) (1 + \operatorname{tg} \alpha b) e^{-\alpha b}}{\frac{4}{1+\mu} \frac{t}{\delta} + \frac{\Phi}{2 \operatorname{Cof}^2 \alpha b} (\operatorname{Sin} 2 \alpha b + 2 \alpha b)} \quad (11)$$

Nach Einsetzen der Werte der Parameterfunktionen aus (10) und (11) in die Gl. (4) und (7) können die Spannungskomponenten der Stegscheibe und der Flanschscheiben zur Teilbelastung Abb. 2a berechnet werden. Hierbei erweist es sich als zweckmäßig, auch die Spannungskomponenten zunächst mit Hilfe von (10) durch die Parameterfunktion D_2 allein auszudrücken. Man erhält so beispielsweise aus (4/1), nach Ausführung der ersten Integration

$$\begin{aligned} \sigma_x' = & Q \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \right) + \\ & + \int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{Cof} \alpha b} \left\{ \left[Q e^{-\alpha b} \left(\alpha b (1 + \operatorname{tg} \alpha b) - \frac{3+\mu}{1+\mu} \right) - D_2 \Phi (2 - \alpha b \operatorname{tg} \alpha b) \right] \operatorname{Cof} \alpha y - \right. \\ & \left. - (Q e^{-\alpha b} + D_2 \Phi) \alpha y \operatorname{Sin} \alpha y \right\} \sin \alpha x d\alpha. \end{aligned} \quad (12/1)$$

Ferner folgt mit (10) aus (7/1)

$$\begin{aligned} \sigma_x'' = & - \int_0^\infty D_2 \left\{ (2\Phi - \alpha z) \operatorname{Cof} \alpha z - \left[\frac{3+\mu}{1+\mu} - \frac{1}{\operatorname{Sin} 2\alpha c + 2\alpha c} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \operatorname{Cof}^2 \alpha c \right) 2\alpha z \right] \operatorname{Sin} \alpha z \right\} \sin \alpha x d\alpha. \end{aligned} \quad (12/2)$$

Schließlich sei noch der Ausdruck für die bezogene Längsschubkraft $T = \delta (\tau_{yx})_{y=b} \equiv \equiv 2t (\tau_{zx})_{z=0}$, die zwischen Steg und Flanschen auftritt, wiedergegeben. Aus (7/3) folgt zunächst

$$T = -2t \int_0^\infty (C_2 + D_2) \cos \alpha x d\alpha$$

und mit (10) entsteht hieraus

$$T = -\frac{4t}{1+\mu_0} \int_0^\infty D_2 \cos \alpha x d\alpha. \quad (12/3)$$

Die in den Formeln (12) auftretenden Hilfsgrößen Q und Φ sind durch die Gl. (5) und (9) festgelegt; die Parameterfunktion D_2 ist durch die Gl. (11) bestimmt. Die verbliebenen Integrale können auf numerischem Wege ausgewertet werden.

Die Ausrechnung für die in Betracht kommenden Anwendungsfälle zeigt, daß die Spannungskomponenten σ_x' und σ_x'' mit wachsendem x den Werten $\pm \frac{P}{2F}$ zustreben, wobei das obere Vorzeichen dem Bereich positiver, das untere Vorzeichen dem Bereich negativer x zugehört. Diese gleichmäßige Verteilung der Längsspannungen über die Stabquerschnitte wird praktisch bereits in $x = \pm 2(b+c)$ erreicht. Die Stegspannungen σ_y' und τ_{xy}' sowie die Flanschspannungen σ_z'' und τ_{xz}'' nehmen mit wachsendem x ab und werden in den Bereichen $|x| \geq 2(b+c)$ vernachlässigbar klein.

6. Übergang auf die Säule nach Abb. 1.

Überlagern wir der Säulenbelastung nach Abb. 2a jene nach Abb. 2b, die im Steg und in den Flanschen nur Normalspannungen

$$\sigma_{x,0} = -\frac{P}{2F}$$

hervorrufen, so gelangen wir zur Säulenbelastung nach Abb. 2c. Der Teil der Säule, der oberhalb des in Abb. 2c schraffierten Abschnittes liegt, wird dann praktisch

spannungsfrei sein und der unterhalb des schraffierten Abschnittes gelegene Säulenteil wird annähernd mit $\sigma_x = -\frac{P}{F}$ gleichmäßig gedrückt sein.

Grenzen wir nun durch zwei Schnitte $x = \text{konstant}$, von welchen der eine oberhalb, der andere unterhalb des schraffierten Gebietes in Abb. 2c verläuft, ein endlich langes Säulenstück ab und bringen wir an der unteren Schnittfläche desselben die zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes notwendigen Gegenkräfte $\sigma_x = -\frac{P}{F}$ an, so befindet sich das abgetrennte Säulenstück praktisch im gleichen Spannungszustand wie in der unendlich langen Säule. Unser Lösungsergebnis, entstanden aus der Zusammenlegung der Teilergebnisse für die Belastungsfälle nach Abb. 2a und 2b, gilt demnach auch für die Säule nach Abb. 1, sofern h_1 und h_2 größer bzw. mindestens gleich $2(b+c)$ sind.

7. Zahlenbeispiel.

Die Stütze bestehe aus einem Peiner Träger Nr. 22. Es ist also $\delta = 10$ mm, $t = 16$ mm, $b = \frac{1}{2}(220 - 16) = 102$ mm, $c = \frac{1}{2}(220 - 10) = 105$ mm. In Abb. 3 ist der Verlauf der Normalspannungen $\sigma_x = \sigma_x' + \sigma_{x,0}$ des Steges und $\sigma_x = \sigma_x'' + \sigma_{x,0}$ der Flanschen längs der Schnitte $x = -0,6b$, $\pm b$, $\pm 2b$, $\pm 3b$ und $\pm 4b$ dargestellt. Die eingeschriebenen Zahlen bedeuten die Verhältnisswerte $\sigma_x \frac{P}{F}$. Ferner ist auch der Verlauf der Spannungen σ_x längs des freien Flanschrandes $z = c$ wiedergegeben; die Berechnung erfolgte mit Hilfe der Beziehung

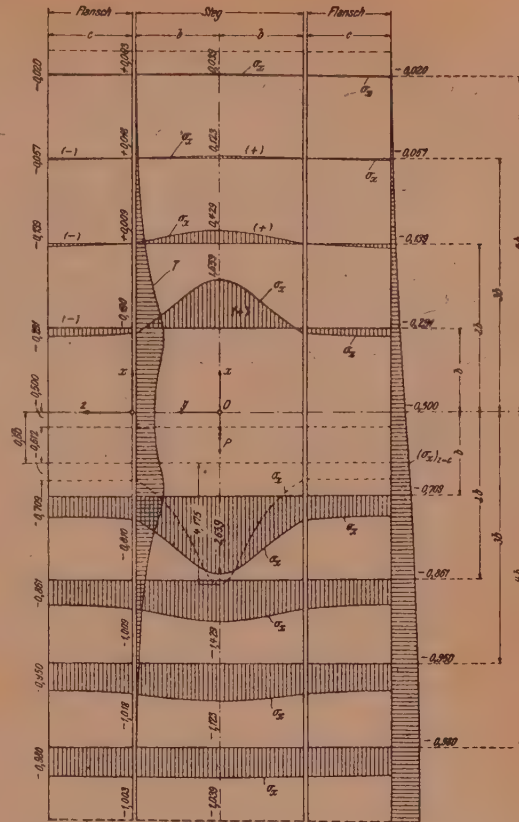


Abb. 3. Verlauf der Spannungen σ_x im Steg und in den Flanschhälften. Verlauf der zwischen Steg und Flanschen wirkenden Längsschubkraft T . Die den Spannungslinien beige-schriebenen Zahlen bedeuten die Verhältnisswerte

$$\sigma_x \frac{P}{F}.$$

$$(\sigma_x)_{z=c} = (\sigma_x'')_{z=c} + \sigma_{x,0} = -2 \int_0^\infty \frac{D_2}{\sin \alpha c + \frac{\alpha c}{\coth \alpha c}} \left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha c \operatorname{Tg} \alpha c \right) \sin \alpha x d\alpha - \frac{P}{2F}.$$

Schließlich ist auch der Verlauf der zwischen Steg und Flanschen wirkenden Längsschubkräfte $T(x)$ dargestellt.

In gleicher Weise kann der Spannungszustand einer Säule mit I-förmigem Querschnitt dann ermittelt werden, wenn im Steg statt der einzelnen mittigen Kraft zwei gleichgroße Längskräfte an symmetrisch gelegenen Stegpunkten angreifen. Als Anteil F_a der Spannungsfunktion F_1 des Steges ist dann die Airysche Funktion der gleichbelasteten unendlich ausgedehnten Ebene in die Rechnung einzuführen. Auf

ähnlichem Wege können aber auch weitere Einzellastangriffe im Stege (wie zum Beispiel von Querlasten oder von exzentrischen Längskräften) mit Benützung der bezüglichen Spannungsfunktionen für die streifenförmige Scheibe³ erledigt werden.

(Eingegangen am 26. November 1946.)

³ K. Girkmann: Angriff von Einzellasten in der streifenförmigen Scheibe. Ingenieur-Arch. 13, 273 (1943).

Buchbesprechungen.

Gasanalytisches Praktikum. Von G. Wagner. 3. unveränderte Auflage. Mit 59 Abb. VI, 121 S. Wien: F. Deuticke. 1946. S 7.50.

Mit diesem kleinen Büchlein legt der Verfasser einen praktischen Leitfaden für die Ausführung von Gasanalysen vor. Das Verdienst liegt in erster Linie darin, die Verfahren der Gasanalyse, welche ein sehr wichtiges Teilgebiet der analytischen Chemie sind, als Einzeldarstellung behandelt zu haben, während bisher dieses Teilgebiet meist nur als kleines Kapitel in den analytischen Lehrbüchern aufscheint. Demgemäß ist eine wesentlich ausführlichere Beschreibung der einzelnen Methoden und der damit verbundenen, oft sehr wichtigen Details bei den einzelnen Operationen möglich.

Das Buch gliedert sich in einen allgemeinen und speziellen Teil. Im allgemeinen Teil erörtert der Verfasser in sehr verständlicher Form zunächst die Grundlagen der Gasanalyse, wie Gasgesetze, die modernen gasanalytischen Apparate in ihrer Funktion und Handhabung. Der spezielle Teil behandelt ausführlich die Bestimmungsmethoden der Gase: Kohlensäure, Kohlenoxyd, Sauerstoff, Wasserstoff, Kohlenwasserstoffe, Stickoxyd und schwefelhaltige Gase. Im Anschluß an diese Bestimmungsverfahren werden verschiedene spezielle gasanalytische Untersuchungen, wie die Rauchgasanalyse, Heizwertbestimmung eines brennbaren Gases, Bestimmung der Dichte eines Gases, Bestimmung von Wasser-, Benzol- oder Quecksilberdämpfen in Gasen, beschrieben. Nicht unberücksichtigt bleiben die Verfahren zur Bestimmung der Edalgase. Den Abschluß bildet ein Abschnitt über Mikrogasanalyse.

Beim Studium dieses Praktikums erkennt man nicht nur in der knappen, alles Unwesentliche weglassenden Darstellung die Hand des Könners, sondern weiters die großen praktischen Erfahrungen, über die der Verfasser auf diesem Gebiete verfügt und die er in klarer und sehr verständlicher Form dem Leser vermittelt.

Es wäre nur zu wünschen, daß dieser guten Darstellung, einer an sich praktisch nicht leicht zu beherrschenden Arbeitsmethodik, wie es insbesondere bei komplizierteren Gasanalysen der Fall ist, eine weite Verbreitung zuteil wird.

M. Niessner, Wien.

Atome und Strahlen. Von G. Ortner. Mit 25 Textabb. IV, 86 S. Wien: Springer-Verlag 1947. In Österreich: S 6.—. Im Ausland: sfr 4.50.

Ein bekannter Fachmann behandelt in dieser Schrift in leichtfaßlicher Weise alles das, was im weitesten Sinne zum Verständnis der heute im Vordergrund des Interesses stehenden Atomenergieverwertung vonnöten ist. Die einzelnen Abschnitte behandeln: Aufbau der Materie. Struktur der Atome. Die radioaktiven Substanzen. Historisches zur Frage der Naturstoffe und der Stoffumwandlung. Die künstliche Atomumwandlung. Erzeugung schneller Korpuskularstrahlen. Die Bauelemente der Materie. Die kosmische Strahlung.

Auch der Verlag hat sich angestrengt, der Schrift eine gediegene Ausstattung zu geben. Wer immer, etwa Mittelschulbildung vorausgesetzt, Interesse für die Errungenschaften der neueren und neuesten Atomforschung hat, wird das Büchlein mit Genuß lesen.

L. Flamm, Wien.

Autorenverzeichnis.

- Castelliz, Lotte, s. Halla, F. S. 230.
- Chmelka, F., Über die Bewegung einer kreisförmigen Scheibe auf reibender Unterlage. S. 302.
- Czitary, E., Zur Bieigungsbeanspruchung der Drahtseile. S. 342.
- Duschek, A., s. Plechl, O. S. 203.
- , Matrizen, Vektoren und Tensoren. S. 371.
- Dworzak, W., Der freie Rand an rechteckigen Platten. S. 66.
- Eckert, J., Die Einhüllende als Mittel zur Lösung technischer Probleme. S. 234.
- Federhofer, K., Die dünne Kreisringplatte mit großer Ausbiegung. S. 21.
- Feifel, E., Ein staubeigenes Fallgesetz. S. 92.
- , Das staubeigene Fallgesetz im Wechsel der Betriebsbedingungen. S. 149.
- Flamm, L., Der Mechanismus des elektrischen Feldes. S. 105.
- , Elektronen-Feldtheorie. S. 358.
- , Atome und Strahlen. Von G. Ortner. (Buchbesprechung.) S. 426.
- Fritsch, V., Die geoelektrischen Verfahren der angewandten Geophysik. S. 190.
- Funk, P., Stabilitätstheorie bei Stäben unter Druck und Drillung. S. 2.
- , Über die Stabilität des Gleichgewichtes bei einem durch Klemme und Hülse oder Klemme und Öse festgehaltenen elastischen Draht. S. 389.
- Gauster-Filek, W., Wechselfelder, Kreis-drehfelder und elliptische Drehfelder. S. 394.
- Girkmann, K., Kraftausbreitung in einer Säule. S. 420.
- Halla, F. und Lotte Castelliz, Drehmoment einer homogen magnetisierten Kugel in einem Magnetfeld. S. 230.
- Inzinger, R., Zur graphischen Integration linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. S. 410.
- , Über die Scheiteltangenten von Eiliniën. (Notiz.) S. 135.
- Jung, F., Der Culmannsche und der Mohrsche Kreis. S. 408.
- Kämmerer, C., Zur Frage der Temperaturdimension. S. 54.
- Kämmerer, C., Über eine Zustandsgleichung mit Berücksichtigung des kritischen Koeffizienten. S. 253.
- Kirste, L., Momentenverteilungs- und Stabilitätsrechnung nach der Steifigkeitsmethode. S. 117.
- Kracmar, F., Das Turbulenzproblem. (I. Entstehung der Turbulenz.) (Bericht.) S. 130.
- , Das Turbulenzproblem. (II. Ausgebildete Turbulenz.) (Bericht.) S. 238.
- Mache, H., Die Verbrennung von Kohleteilchen in turbulent bewegter Luft. S. 77.
- , Über die Erhöhung der Zündfähigkeit des elektrischen Funkens durch örtliche Verbesserung des zu zündenden Gasgemisches. S. 273.
- Magyar, F., K. Wolf zum 60. Geburtstag. S. 251.
- , Flächentragwerke. Von K. Girkmann. (Buchbesprechung.) S. 136.
- , Einführung in die Statik. Von F. Chmelka und E. Melan. Vierte Auflage. (Buchbesprechung.) S. 136.
- Melan, E., Ein rotationssymmetrischer Spannungs- und Verzerrungszustand einer gelochten Scheibe bei nicht linearem Spannungs-Dehnungsgesetz. S. 14.
- Nießner, M., W.D. Treadwell, Tabellen zur qualitativen Analyse. Von F. P. Treadwell † und V. Meyer †. Siebzehnte Auflage. (Buchbesprechung.) S. 246.
- , Gasanalytisches Praktikum. Von G. Wagner. Dritte Auflage. (Buchbesprechung.) S. 426.
- Parkus, H., Zur Stabilität des Einrotor-Hubschraubers. S. 58.
- , Drillschwingungen von Luftschraubenblättern. S. 296.
- Plechl, O., und A. Duschek, Grundzüge einer Algebra der elektrischen Schaltungen. S. 203.
- Pongratz, F., Die Nutzbreite der zweiseitig freigestützten, mit einer Einzellast belasteten Stahlbetonplatte. S. 351.
- Pröll, A., Der beschleunigte Aufstieg eines Strahlflugkörpers. S. 175.

- Schön, R., Zusammensetzung von Belastungsströmen unruhiger Verbraucher, die Pendlungsleistung. S. 157.
- Söchting, Fritz, Freie erzwungene gedämpfte Schwingungen mit nicht linearer Kennlinie eines Systems mit einem Freiheitsgrad. S. 382.
- Torre, C., Über den plastischen Körper von Prandtl. Zur Theorie der Mohrschen Grenzkurve. S. 36.
- , Zur Beulung versteifter Rechteckplatten bei veränderlicher Randbelastung. S. 137.
- Torre, C., Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung auf die Fließ- und Bruchgrenze. S. 316.
- Wolf, K., Die Beanspruchung der Motorenlager bei der Landung von Flugzeugen. S. 51.
- , Einführung in die Festigkeitslehre für Studierende des Bauwesens. Von F. Chmelka und E. Melan. (Buchbesprechung.) S. 246.
- Wunderlich, W., Höhere Radlinien. S. 277

Seit 1. Juli d. J. erscheint:

Betrieb und Fertigung

**Zeitschrift für Werksleiter, Betriebsingenieure, Konstrukteure, Werkmeister
und Abnahmebeamte**

Fachbeirat: J. Brazda, F. Grill, F. Hofmann, A. Leon, J. Twaroch, O. Völter

Schriftleiter: L. Tschirf, Wien

Bisher liegen vor:

Heft 1/2 (Juli/August 1947)

Inhaltsverzeichnis:

Zum Geleit.

Originalarbeiten:

Kogler, E.: Nachkriegs-Planung.

Manzinger, H.: Das Wesen der konstruktiven Tätigkeit und die verschiedenen konstruktiven Aufgaben.

Feifel, E.: Zur Frage einer österreichischen Staubbekämpfungsstelle.

Roscher, E.: Der Walzdraht aus Nichteisenmetallen.

Kirste, L.: Neuere Verbindungselemente im Maschinenbau und Leichtbau.

Sawin, N. N.: Zylindrometer — Vorrichtung zum Ermitteln großer Durchmesser.

Rundschau.

Zeitschriftenschau.

Buchbesprechungen.

Heft 3/4 (September/Oktober 1947)

Inhaltsverzeichnis:

Manzinger, H.: Die „Bauteile“, ihre Gestaltung und Ordnung, sowie ihre Bedeutung für die Entwicklung fortschrittlicher Konstruktionen.

Husar, J.: Optisches Glas.

Tschirf, L.: Genauigkeitslängenvergleicher (Komparatoren, Meßmikroskope, Meßmaschinen).

Weber, L. und K. Zeppelzauer: Die Arbeitsstudie.

Buratowsky, F.: Die Normalleistung. Eine arbeitswissenschaftliche Studie.

Die Werkzeugmaschinenschau der Wiener Frühjahrsmesse 1947.

Rundschau.

Zeitschriftenschau.

Buchbesprechungen.

**Die Zeitschrift erscheint monatlich und kostet halbjährlich in Österreich S 32.—, im Ausland
sfr. 24.— zuzüglich Versandgebühren**

Bestellungen durch jede Buchhandlung oder durch die Post

S P R I N G E R - V E R L A G I N W I E N

Der Kreis unserer technischen Fachzeitschriften rundet sich. Neben die schon bestehenden) tritt jetzt noch*

ÖTF

Österreichische Zeitschrift für Telegraphen-, Telephon-, Funk- u. Fernsehtechnik

Organ der Post- und Telegraphenverwaltung

Unter Mitarbeit des Schwachstrominstitutes der Technischen Hochschule in Wien

Schriftleitung: Dipl.-Ing. Vincenz Petroni

der in dem Augenblick der Neuorganisation der österreichischen Fernmeldetechnik und der Automatisierung des europäischen Fernsprechnetzes besondere Aufgaben und besondere Bedeutung zukommen. Sie wird neben Originalarbeiten und Übersichten auf dem Gesamtgebiet der Fernmeldetechnik auch besondere Abhandlungen für Lehrzwecke zur vertieften Ausbildung aller technischen Bediensteten der Post- und Telegraphenverwaltung, alle amtlichen Mitteilungen und Vorschriften der Post- und Telegraphenverwaltung fernmeldetechnischer und fernmelde-rechtlicher Natur bringen

Die Zeitschrift erscheint vorläufig zweimonatlich und kostet halbjährlich in Österreich S 32.—, im Ausland sfr. 24.— zuzüglich Versandgebühren

Bisher liegen vor:

1. Jahrgang, Heft 1/2 (Juli / August)

Inhaltsverzeichnis:

Der Fernmeldetechnik Österreichs auf den Weg.
Geleitwort der Post- und Telegraphenverwaltung.

Originalarbeiten:

Schmid, K.: Die Automatisierung des Fernverkehrs in Österreich. Untersuchungen zum Aufbau des Fernnetzes.

Sinreich, K.: Der gegenwärtige Stand der Fernsehtechnik.

Kraus, G.: Näherungsformeln zur Ermittlung der Gitterleistungen bei Senderöhren.

Wieland, F.: Betrachtungen zur Ausgestaltung des Wiener Telephonnetzes.

Schmidl, F.: Eine Sparschaltung für die Tonräder der Wechselstromtelegraphie.

Kurzberichte aus dem Fernmeldewesen.

Zeitschriftenschau.

Heft 3/4 (September / Oktober 1947)

Inhaltsverzeichnis:

Franzl, W.: Das trägerfrequente Fernsprechen auf Freileitungen und seine Bedeutung für das österreichische Fernmeldewesen.

Müller, M.: Der beschleunigte Ferndienst mittels Fernwahl im Randgebiet von Wien.

Efler, F.: Konferenzgespräche im Ortsnetz Wien.

Pauli, E.: Der Fernsprechkundendienst im Ortsnetz Wien.

Schiffermüller, R.: Pupinspulen.

Leopoldsberger, K.: Die neue Siemens-Hauptuhr.

Schmid, H.: Der Zweibandausgleich in älteren Fernkabeln.

Normen und Vorschriften.

Zeitschriftenschau.

Buchbesprechungen.

*) Berg- und Hüttenmännische Monatshefte, Betrieb und Fertigung, E und M Elektrotechnik und Maschinenbau, M und W Maschinenbau und Wärmewirtschaft, Österreichische Chemiker-Zeitung, Österreichische Bauzeitschrift, Geologie und Bauwesen, Österreichisches Ingenieur-Archiv, Zentralblatt für die gesamte Forst- und Holzwirtschaft.

S P R I N G E R - V E R L A G I N W I E N

Printed in Austria